This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

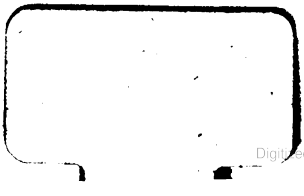
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Library
of the
University of Wisconsin



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Höheren Geodäsie.

Von

August Decker.

Mit drei Figurentafeln.

Neue Ausgabe.

MANNHEIM,

Verlag von Heinrich Hoff.

1845.

Digitized by Google

Digitized by Google

86996
AUG 28 1905
SQ
D35

Vorrede.

So reich auch die deutsche Literatur an mathematischen Werken ist, so mangelt es uns doch noch an einem solchen Lehrbuche der höheren Geodäsie, welches eine vollständige Uebersicht aller bei einer allgemeinen Landesvermessung vorkommenden Rechnungen gewährt, und welches auch für weniger Geübte verständlich ist. Es dürfte daher einige Entschuldigung verdienen, wenn ich dem Publikum hiermit ein neues Lehrbuch dieser Wissenschaft übergebe, da dasselbe alle Rechnungen der höheren Geodäsie enthält, und da ich mich zugleich bestrebte, dem Leser Alles so klar als möglich zu machen. Ich muſs zwar bekennen, daſs ich mit meiner Arbeit keineswegs ganz zufrieden bin, indem dieselbe allerdings noch gar Manches zu wünschen übrig läſst; doch glaube ich, daſs das Buch dessen ungeachtet manchem angehenden Cameralisten und Geometer, der sich seither vergeblich nach einem ähnlichen Werkchen umgesehen hat, nicht unwillkommen seyn wird.

Uebrigens brauche ich kaum zu erwähnen, daſs ich bei der Ausarbeitung desselben die wichtigsten hierher einschlagenden Werke benutzt habe, und benutzen muſste. Meine Hauptquellen waren die Werke von Puissant, Delambre, Littrow, Stein und Gru-

Digitized by Google

nert, ferner das Journal de Physique, von Zach's Monatliche Correspondenz u. s. w.

Die Beschreibung der bei den geodätischen Operationen gebräuchlichen Instrumente und die Methoden ihrer Rectification habe ich (einige kurze Notizen in dem ersten Abschnitte nicht gerechnet) gänzlich übergangen, da dieser Gegenstand bereits in vielen andern Werken gründlich und ausführlich abgehandelt worden ist.

Einen Uebelstand, der bei meinem Buche statt findet, kann ich hier nicht unerwähnt lassen. In den Abschnitten I bis VII habe ich mich der neuen Kreiseintheilung, in den späteren Abschnitten dagegen der alten bedient. Ich wollte nicht gerne die Vortheile, welche mit der neuen Eintheilung verbunden sind, aufgeben, und habe sie daher da, wo es möglich war, beibehalten. In der zweiten Hälfte des Buches mufste ich dagegen die alte Theilung wieder anwenden, weil der Aequator, die Meridiane u. s. w. vor wie nach in 360° eingetheilt werden.

Schliefslich mufs ich bitten, die angezeigten Druckfehler, welche mir bei der Correctur entgangen sind, so wie die ebenfalls angemerkten Fehler in den Figurentafeln, vor dem Gebrauch des Buches zu verbessern.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnifs.

	Seite
Einleitung. (§. 1 u. 2.)	1
Erster Abschnitt. Von der Basismessung. (§. 3—5.)	5
Zweiter Abschnitt. Von der näherungsweisen Bestimmung des mittleren Erdhalbmessers. (§. 6—10.)	11
Dritter Abschnitt. Von den geodätischen Linien (§. 11 — 15.)	21
Vierter Abschnitt. Von der Triangulation. (§. 16—20.)	38
Cap. I. Von den Dreiecken des ersten Rangs.	—
Cap. II. Von den Dreiecken des zweiten, dritten und vierten Rangs.	48
Fünfter Abschnitt. Von der Berechnung der Coordinaten. (§. 21 — 37.)	52
Cap. I. Von den Coordinaten der Dreieckspuncte ersten Rangs.	—
Cap. II. Von den Coordinaten der Dreieckspuncte zweiten dritten und vierten Rangs.	73
Sechster Abschnitt. Von der Gemarkungs- und Parzellenvermessung. (§. 38 — 40.)	91
Siebenter Abschnitt. Von den Höhenmessungen. (§. 41 — 49.)	99
Cap. I. Von den barometrischen Höhenmessungen. . .	—
Cap. II. Von den trigonometrischen Höhenmessungen. .	116
Achter Abschnitt. Einige Lehren aus der Astronomie, als Vorkenntnisse zu den folgenden Abschnitten. (§. 50 — 91.)	121
Cap. I. Erscheinung des Weltgebäudes und künstliche Eintheilung der Himmelskugel.	—
Cap. II. Von der Zeit.	125

Digitized by Google

Seite

Cap. III. Bestimmung der scheinbaren Orte der Gestirne auf der Oberfläche des Himmels. 134

Cap. IV. Von der Präcession. 136

Cap. V. Von der Aberration 147

Cap. VI. Von der Nutation. 165

Cap. VII. Von der Refraction. 174

Cap. VIII. Von der Parallaxe. 180

Neunter Abschnitt. Von der astronomischen Bestimmung der geographischen Breite. (§. 91 — 95.) 190

Zehnter Abschnitt. Von der astronomischen Bestimmung der geographischen Länge. (§. 96 — 113.) 202

Elfter Abschnitt. Von der Bestimmung des ersten Azimuths. (§. 114 u. 115.) 234

Zwölfter Abschnitt. Von der geodätischen Bestimmung der geographischen Länge und Breite, so wie der Convergenz der Meridiane. (§. 116 — 151.) 236

Cap. I. Entwickelung der von Bohnenberger und Oriani angegebenen Grundformeln. . . . . —

Cap. II. Umwandlung dieser Formeln. 260

Dreizehnter Abschnitt. Von der Entwerfung geographischer Netze. (§. 152 — 155.) . . . 289

Vierzehnter Abschnitt. Von der Berechnung der beiden Axen, der Oberfläche und des Körperinhaltes der Erde. (§. 156 — 159.) 297

Digitized by Google

I. Druckfehler.

Seite 10. Z. 4 v. u. Nach der Zahl + 34,260683 ist das Wort «Toisen» hinzuzufügen. — S. 19. Z. 17. Statt $\frac{S^2}{R}$ lies $\frac{S^2}{R^2}$. — S. 33 Zeile 5. v. u. Statt mxx' lies mXX'. — S. 34. Z. 3. Der Buchstabe x mufs hier wegfallen. — S. 50. Z. 23 u. 24. Statt log b lies log sin b. — S. 57. Z. 5 v. u. Statt $\frac{S^4}{}$ lies $\frac{S^4}{3}$. — S. 58. Z. 5 v. u. Statt $\Delta p\ \Delta M\ .P$ lies $\Delta p\ .\Delta m\ .P$. — S. 59. Z. 5 v. u. Statt «E ist» lies «Es ist» — S. 61. Z. 15. Statt $\frac{S.\cos a}{r}\ .\ \frac{\Delta m}{2r}$ lies $\frac{S.\cos a}{r} + \frac{\Delta m}{2r}$. — S. 62. Z. 6 v. u. Statt cos 2b lies cos 2β. — S. 75. Z. 14 u. 15. Statt «conv. W.» ist zu lesen «concav. W.» — S. 85. Z. 4. Statt «umgeändert» lies «ungeändert». — S. 95. Z. 8. v. u. Statt x^{IV} lies y^{IV}. — S. 96. Z. 4. v. u. Statt «bedingt» lies «beendigt». — S. 193. Z. 11 u. 12. Statt d mufs gesetzt werden δ, u. statt d' ist zu setzen δ'. — S. 196. Z. 1 u. 4. Statt $\sin\left(\frac{s}{2}\right)^2$ lies $\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2$. — S. 196. Z. 7. Statt $\sin\left(\frac{s}{2}\right)^4$ lies $\left(\sin\frac{s}{2}\right)^4$. — S. 196. letzte Zeile. Statt $\sin\left(\frac{s}{2}\right)^6$ lies $\left(\sin\frac{s}{2}\right)^6$. — S. 207. Z. 8. v. u. Statt «die» lies «der». — S. 237. Z. 13. Statt ☉ lies t. — S. 239. Z. 8. Statt $(1-e^2)\sin{}^2\beta)^{3/2}$ lies $(1-e^2\sin{}^2\beta)^{3/2}$. — S. 239. Z. 13. Statt E^2 lies s^2. — S. 243 letzte Zeile. Statt e^2 lies s^2.

II. Fehler in den Figurentafeln.

Fig. 2. Die Spitze des Winkels, welcher der Dreiecksseite AF gegenüber liegt, mufs mit B, und die Winkelspitze, welche der Dreiecksseite FG entgegen steht, mit C bezeichnet werden. — In Fig. 5 mufs der Punct, welcher dem Puncte A in Fig. 7 entspricht, ebenfalls den Buchstaben A erhalten. — Fig. 11. Hier sind zwei Puncte mit C bezeichnet. Statt des einen C, welches unten auf der linken Seite der Figur steht, mufs A gesetzt werden. — In Fig. 16 mufs der Winkel COb durch r, der Winkel CbO durch y, der Winkel COa durch q und endlich der Winkel CaO durch x bezeichnet werden. — In Fig. 23 gehört der Buchstab a an die Stelle, wo die Verlängerung der Linie rE die Linie aA schneidet. — In Fig. 36 mufs diejenige Seite des Vierecks, welche der Basis dc'' gegenüberliegt, durch $c\gamma'$ bezeichnet werden. — In Fig. 37 mufs der Winkel, welcher dem Bogen FG entspricht, nicht durch λL, sondern durch λ — L bezeichnet werden. — Bei Fig. 43 bittet man die kleinen Bögen bei den Winkeln α' nicht zu berücksichtigen, da dieselben unrichtig gezogen sind. — Bei Figur 51 ist endlich Folgendes zu bemerken. Wenn man die Linie HO so weit verlängert, dafs sie die Peripherie des Kreises HDYC' auch auf der andern Seite schneidet, so ist dieser letztere Durchschnittspunct der Punct der Frühlingsnachtgleiche.

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

§. 1.

Unter der höheren Geodäsie verstehen wir die systematische Darstellung der Regeln, nach welchen eine zusammenhängende Vermessung eines ganzen Landes ausgeführt werden mufs. Die niedere Geodäsie dagegen, oder, wie sie gewöhnlich genannt wird, die Feldmefskunst, lehrt, wie kleinere Theile der Oberfläche unserer Erde vermessen werden können. In dem vorliegenden Werke wird, wie der Titel besagt, nur die erstere dieser Wissenschaften behandelt.

Der Hauptzweck solcher allgemeinen Landesvermessungen ist gewöhnlich die Katastrirung der Grundstücke, und es ist allerdings auch ohne Kenntnifs des Flächengehaltes aller Gemarkungen und Parzellen eines Landes (mit welcher natürlich die Kenntnifs der Bodengüte und climatischen Verhältnisse verbunden seyn mufs) eine gleichmäfsige Vertheilung der Grundsteuer nicht möglich.

Wollte man nun, um zu dieser Kenntnifs des Flächengehaltes der Gemarkungen und Parzellen zu gelangen, ohne alle weitere geodätische Operationen, blos jedes einzelne Grundstück mit der Mefsstange und Kreuzscheibe, oder mit dem Mefstische, aufnehmen, und die Flächengehalte der Gemarkungen durch die Summirung der Flächengehalte aller in derselben gelegenen Parzellen berechnen, so würde man unmöglich die erforderliche Genauig-

Digitized by Google

keit erreichen können, indem sich bei der Messung der Linien mittelst der Mefsstange oder der Mefskette unvermeidliche Fehler einschleichen, und man würde, wenn man auf den Grund dieser Vermessung eine Charte des aufgenommenen Landes entwerfen wollte, bald die bedeutendsten Verschiebungen auf derselben bemerken.

Die Vollkommenheit, mit welcher die Winkelmefsinstrumente gegenwärtig verfertigt werden, und die Möglichkeit, mittelst derselben die Winkel bis auf wenige Secunden genau zu bestimmen, bietet uns ein Mittel dar, jene Irrthümer zu vermeiden. Wenn man nämlich das zu vermessende Land mit einem Dreiecksnetze überzieht, in welchem alle Winkel und eine der Dreiecksseiten aufs Genauste gemessen werden, und wenn man sodann aus diesen Elementen sämmtliche Dreiecksseiten berechnet, so erhält man an allen Orten des Landes eine grofse Anzahl von Linien, deren Länge mit grofser Schärfe bestimmt ist, und mittels welcher wir im Stande sind, die aus der Detailaufnahme der Gemarkungen und Parzellen gefundenen Resultate zu controliren und zu verbessern.

Da diese Dreiecke zugleich dazu dienen, die geographische Länge und Breite der wichtigsten Puncte des Landes zu berechnen, so benutzt man dieselben auch aller Orten, wo allgemeine Landesvermessungen ausgeführt werden, zu diesem Zwecke, und es soll daher auch in dem vorliegenden Werke das Verfahren gezeigt werden, welches man hierbei einzuschlagen hat.

§. 2.

Die erste Operation bei einer allgemeinen Landesvermessung ist gewöhnlich die Ausmessung einer Basis, d. h. einer Linie, welche als erste Dreiecksseite bei der erwähn-

Digitized by Google

ten Triangulation dienen soll. (Erster Abschnitt.) Nach dieser Operation kann man die Bestimmung des Winkels vornehmen, den die Basis mit dem Meridiane eines ihrer Endpuncte bildet, eine Aufgabe, die blos durch astronomische Beobachtungen zu lösen ist. (Elfter Abschnitt.) Sodann schreitet man zu der Auswahl, Beobachtung und Berechnung der Dreiecke ersten, zweiten, dritten und vierten Rangs (Vierter Abschnitt.), zu der Ausmessung der Umfangswinkel und Umfangsseiten der Gemarkungen, Fluren und Gewanne, und berechnet sofort von allen Dreiecksputncten, so wie von allen Winkelpuncten der Gemarkungen etc. die Coordinaten, (Fünfter Abschnitt.) mit deren Hülfe man sodann leicht die Flächeninhalte der Gemarkungen, Fluren und Gewanne findet. Nach allen diesen Arbeiten wird erst zur Vermessung der Parzellen übergegangen. (Sechster Abschnitt.)

Ueberhaupt ist es bei allen bedeutenden Vermessungen Regel, von dem Gröfseren zu dem Kleineren überzugehen, und die früheren Arbeiten zur Controle und Verbesserung der Nachfolgenden zu benutzen.

Die Beobachtung der Höhenwinkel der Dreiecksputncte mittels des Theodoliten wird am besten gleichzeitig mit der Beobachtung der Horizontalwinkel der Dreiecke vorgenommen. Die barometrischen Höhenbestimmungen können dagegen zu beliebiger Zeit ausgeführt werden. (Siebenter Abschnitt.)

Will man die Resultate einer allgemeinen Landesvermessung zu Entwerfung genauer Landcharten benutzen, so ist es erforderlich, die schon oben erwähnte Länge- und Breiteberechnung hinsichtlich der wichtigsten Puncte dieses Landes vorzunehmen, zu welchem Zwecke man vorher durch astronomische Beobachtung die geographische Lage des Hauptortes mit der gröfstmöglichsten Genauigkeit be-

Digitized by Google

stimmt. Das hierbei einzuschlagende Verfahren wird in den Abschnitten 9 und 10 gelehrt, nachdem zuvor im achten Abschnitt die erforderlichen astronomischen Vorkenntnisse angegeben worden sind. Hat man die geographische Lage des Hauptortes durch Beobachtung gefunden, so wird durch blose Rechnung die Länge und Breite der übrigen Puncte des Dreiecksnetzes gesucht. (Zwölfter Abschnitt.)

Die Art und Weise, wie man sich der Resultate der geographischen Ortsbestimmung zur Entwerfung der Landchartennetze zu bedienen hat, ist in dem dreizehnten Abschnitte auseinandergesetzt.

Im letzten Abschnitt sind endlich als Anhang die Formeln für die Berechnung der beiden Axen, der Oberfläche und des Körperinhaltes der Erde entwickelt.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Von der Basismessung.

§. 3.

Diejenige Operation, womit gewöhnlich jede genaue Vermessung eines ganzen Landes begonnen wird, besteht darin, dafs man in demselben zwei Puncte, z. B zwei Thürme, auswählt, und die Entfernung derselben, welche wenigstens zwei bis drei Stunden betragen mufs, mit der gröfstmöglichsten Genauigkeit ausmifst. Man kann sich hierbei folgenden Verfahrens bedienen *).

Zuerst wird die auszumessende Linie, welche die Basis genannt wird, abgesteckt, d. h. es werden zwischen ihren Endpuncten noch viele andere Puncte, welche mit jener in einer und derselben Richtung liegen, bezeichnet.

Um dieses zu bewerkstelligen bedient man sich eines mit einem Höhenkreise versehenen Theodoliten. Man bringt diesen in den einen Endpunct A der Basis, stellt ihn horizontal, und visirt dann mit dem Fernrohre nach dem andern Endpuncte B. Nachdem man das Instrument in dieser Stellung festgesetzt hat, kann man durch verschiedene Neigungen des Fernrohrs eine Menge Puncte angeben, durch welche die auszumessende Linie geht. Diese Puncte werden mit Pfählen bezeichnet, deren Errichtung der Beobachter in A

*) Man siehe die Base du système métrique décimal par Méchain et Délambre. Vol. II. p. 31. sq.

Digitized by Google

dirigirt. Da aber die hierzu nothwendigen Signale oder Winke auf eine grofse Entfernung undeutlich werden, so begnügt man sich, von A aus nur einige Puncte anzugeben, und begibt sich nachher mit dem Instrumente an einen derselben, von woher man auf die nämliche Art wie in A, neue Puncte bestimmen kann.

Die Instrumente zum Messen der Basis sind stählerne Lineale*), deren Länge bei einer bestimmten Temperatur sehr genau bekannt seyn mufs. Da man nun durch genaue Beobachtungen weifs, um wie viel Theile seiner Länge sich der Stahl bei einer Temperaturerhöhung von einem Grade ausdehnt, und da man die Ausdehnungen, den Erfahrungen gemäfs, mit der Anzahl Grade der Temperaturerhöhung proportional annehmen darf, so kann man leicht berechnen, um wie viel das Lineal länger oder kürzer geworden ist, wenn man seine Temperatur kennt.

Da man ferner nicht immer annehmen kann, dafs die Temperatur der Luft auch durchaus ganz jene des Metalls ist, so mufs man ein Mittel suchen, um letztere genau angeben zu können. Man findet dieses Mittel in dem sogenannten metallischen Thermometer, dessen wesentliche Einrichtung darin besteht, dafs auf die Lineale von Stahl andere kürzere von Kupfer aufgelegt und an dem einen Ende mit den ersteren durch Schrauben fest verbunden, an dem andern hingegen nicht befestigt werden, so dafs sie, wenn sie sich mehr als die stählernen Lineale ausdehnen, frei über diese hingleiten können. Wenn man nun diese Instrumente verschiedenen Temperaturen aussetzt, so

*) Noch besser, aber auch bei weitem kostspieliger, sind die Lineale von Platina, weil sich dieses Metall durch die Einwirkung der Wärme unter allen am wenigsten ausdehnt.

Digitized by Google

bemerkt man bei jeder dieser Temperaturen einen verschiedenen Abstand der Ende der Lineale, weil sich das Kupfer bei weitem mehr ausdehnt, als der Stahl, und so kann man durch eine Reihe von Beobachtungen das Gesetz finden, nach welchem man aus dem Abstande der Ende der Lineale auf die Temperatur des Instrumentes schliefsen mufs. Den Abstand selbst findet man auf einer sehr genauen Eintheilung, welche in den Stahl eingeschnitten, und mit einem dazu gehörigen auf dem Kupfer befindlichen Nonius versehen ist.

Um den Stofs beim Aneinandersetzen der Lineale zu vermeiden, darf man dieselben nicht in unmittelbare Berührung bringen, sondern ihr Zwischenraum wird mit einem kleinen Auszuge, oder Schieber, welcher sehr genau abgetheilt, und ebenfalls mit einem Nonius versehen ist, ausgemessen.

§. 4.

Diese Instrumente, von denen man mehrere haben mufs, und welche auf zweckmäfsig eingerichteten Gestellen ruhen müssen, werden nach einander in die Richtung der abgesteckten Linie gesetzt. Ist dieses geschehen, so wird das erste weggenommen, und vor das letzte gebracht, und auf diese Art fortgefahren bis man den zweiten Endpunct der Basis erreicht hat.

Der Winkel, den jedes Lineal mit der Horizontallinie macht, wird mit einer Art von Setzwage gemessen, und es folgt hieraus, dafs man von A nach B (Fig. 1.) eigentlich in einer gebrochenen Linie A C D B gelangte, deren einzelne Theile hier die Lineale mit den Auszügen sind.

Die Länge dieser gebrochenen Linie ist jedoch nicht das, was wir suchen; es ist vielmehr jetzt unsere Aufgabe, aus

Digitized by Google

den Angaben der Messung die Länge derjenigen Linie ($\alpha\beta$) zu berechnen, welche durch die Fufspuncte der von A und B auf die unter dem festen Lande fortgesetzte Meeresfläche gefällten Normalen bestimmt wird. Um diesen Zweck zu erreichen, müssen wir zuvörderst die Länge der horizontalen Linie Axyz, welche mit der Linie $\alpha\beta$ parallel ist, zu bestimmen suchen. Hierzu ziehe man aus den Puncten C und D die Linien Co, Dp mit den correspondirenden xy, yz parallel, bis sie den Normalen $D\delta$, $B\beta$ begegnen. Da nun in so kleinen Entfernungen, wie Ax, yx, yz die Krümmung der Linie Az durchaus unmerklich ist, so wird man ohne Irrthum die Linien Ax, yx, yz und Co, Dp als gerade ansehen können. Da ferner, wegen der Gröfse des Erdhalbmessers, zwei nahe Normalen, und besonders kleine Stücke derselben, als parallel betrachtet werden können, so darf man Co = xy, Dp = yz setzen.

Wir betrachten also die Dreiecke ACx, CoD, DBp als geradlinig und rechtwinklig, und nehmen an, dafs die Summe Ax + Co + Dp = Az sei. AC, CD, DB, so wie die Winkel CAx, oCD, BDp sind unmittelbar gemessen, und man findet daher leicht Ax = AC.cos.CAx, Co = xy = CD. cos. oCD, Dp = yz = DB. cos. BDp. Es ist dann:

$$AC - Ax = AC\,(1 - \cos. CAx) = 2AC.\left(\sin\frac{CAx}{2}\right)^2$$

Da man zur Messung einer Basis immer ein sehr ebenes Terrain wählt, so wird der Winkel CAx meistens sehr klein seyn. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn wir die Anzahl Secunden, welche in jenem Winkel enthalten sind = V setzen: $AC - Ax = 2.AC\,\frac{V^2}{4}.\sin^2 1''$

Die Summe aller Differenzen dieser Art ist der Unterschied der Linie ACDB und der Linie Axyz. Diesen

Digitized by Google

Unterschied nennt man die Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont.

§. 5.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Länge der Linie $\alpha\beta$ zu finden. Die Länge von Az heifse a, die von $\alpha\beta$ heifse x; $A\alpha = z\beta$ sey $= h$ und der Radius der Erde sey $= R$ *).

Da Az und $\alpha\beta$ concentrische Kreisbögen sind, so ist: $a : x = R + h : R$, weil diese Bögen sich wie ihre Radien verhalten; also: $x = \frac{a \cdot R}{R+h}$ und $a - x = \frac{a \cdot h}{R+h}$

Weil nun die Höhe h immer sehr klein im Vergleich mit R ist, so kann man $a - x = \frac{a\,h}{R}$ setzen. Dieser Werth heifst die Reduction auf die Meeresfläche.

Es ist leicht einzusehen, dafs man zur Berechnung dieser Reduction weder einen genauen Werth von h noch einen genauen Werth von R nöthig hat. Wie man die Höhen der Puncte A und B über der Meeresfläche findet, lehrt das erste Capitel des siebenten Abschnittes.

Um nun die Länge der Basis zu berechnen, müssen zu der Summe der Lineale folgende Zahlen addirt werden.

1) Die Summe der Auszüge.

2) Die Summe der Ausdehnungen jedes Lineals durch den Ueberschufs der Temperatur desselben über die Temperatur, bei welcher die Lineale die bekannte Länge haben. Diese Temperatur-Correction berechnet man sehr kurz, wenn man bedenkt, dafs die Ausdehnung der Auszüge durch die Wärme gar nicht in Betracht gezogen zu werden verdient.

---

*) Wie dieser gefunden wird, zeigen wir im zweiten Abschnitte.

Digitized by Google

Man nenne l die genau bekannte Länge eines jeden Lineales bei der Temperatur a; t, t', t'' .... seyen die Temperatur der Lineale, die Anzahl der Lineale heifse n; dann ist die Ausdehnung eines Lineales = (Ausdehnung für 1 Grad) × (t — a); da aber die Lineale alle gleich lang sind, (und dieses besonders weil man hier die Auszüge aufser Acht läfst), so ist die Ausdehnung für einen Grad, welche wir ε nennen wollen, für alle Lineale die nämliche; mithin die Summe aller Ausdehnungen der Lineale

$= \varepsilon \times (t + t' + t'' \ldots - na)$ oder $n\varepsilon \times \left(\frac{t + t' + t'' \ldots}{n} - a\right)$;

das heifst: man erhält die Summe der Ausdehnung der Lineale, wenn man die Ausdehnung eines Lineals für 1 Grad des Thermometers mit der Anzahl der Lineale, und dieses Product mit dem Ueberschufs der mittleren Temperatur derselben über die Temperatur a multiplicirt.

Da nun die Basis so viel weniger enthält, als die Lineale sich ausgedehnt haben, so mufs diese Ausdehnung zu dem Gefundenen addirt werden. —

Von der Summe der Lineale müssen abgezogen werden:

1) die Reduction auf die Meeresfläche,
2) die Reduction auf den Horizont.

Um eine Idee von dem Betrage der nöthigen Reductionen zu geben, wollen wir ihre Werthe in der Basis von Melun, welche etwas über 6076 Toisen betrug, hier angeben.

Die Auszüge betrugen zusammen	+	34,260683
Die Temperaturcorrection	+	0,249128
Die Reduction auf die Meeresfläche	—	0,07627
Die Reduction auf den Horizont	—	0,328901

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Von der näherungsweisen Bestimmung des mittleren Erdhalbmessers.

§. 6.

Wir haben soeben gesehen, dafs es zur Reduction der Basis auf die Meeresfläche erforderlich ist, eine genäherte Kenntnifs von der Gröfse des Erdradius zu haben. Es mufs daher vor allen Dingen angegeben werden, wie man sich diese genäherte Kenntnifs verschaffen könne.

Auf astronomischem Wege bestimme man die geographische Breite zweier, mehrere Grade von einander entfernten, und nahe auf demselben Meridian liegenden Puncte A und R (Fig. 2.) und verbinde diese beiden Puncte durch eine Reihe von Dreiecken, in welchen alle Winkel und eine der Dreiecksseiten mit grofser Genauigkeit gemessen werden müssen. AF sey die gemessene Basis, R′A der Meridian des Punctes A und R′ liege nicht weit von R entfernt, so dafs man annehmen kann, das von R auf AR′ gefällte Perpendikel falle mit dem durch R′ gezogenen Parallelkreise zusammen. Mit Hilfe der gemessenen Winkel und der Basis AF (welche letztere im gegenwärtigen Falle natürlich nicht auf die Meeresfläche reducirt werden kann, weil man den Erdradius noch nicht kennt) berechne man sämmtliche Dreiecksseiten, indem man dieselben als geradlinig ansieht. Hierauf denke man sich eine der Dreiecksseiten z. B. AB verlängert,

Digitized by Google

und berechne den Winkel α, welches ganz einfach dadurch geschieht, dafs man den Winkel $ABC = ABF + FBC$ von zwei Rechten abzieht. Durch die Puncte C und D denke man sich mit AB parallele Linien gezogen. Den Winkel, DCd', welchen wir α' nennen wollen, findet man nun, indem man zu dem convexen Winkel $BCD = 4$ Rechten $-$ $(m + n + o)$ den Winkel $\alpha = c'' C d'$ addirt, und 2 Rechte von dieser Summe abzieht. Ebenso findet man den Winkel $RDr' = \alpha''$, indem man zu dem convexen Winkel $CDR =$ 4 Rechten $-$ $(p + q)$ den Winkel $\alpha' = d'' Dr'$ addirt und von dieser Summe zwei Rechte subtrahirt.

Man hat nunmehr: $Bc = BC \cdot \cos \alpha$, $Cd' = cd = CD \cos \alpha'$, $Dr' = dr = DR \cdot \cos \alpha''$, also $Ar = AB + BC \cos \alpha + CD \cos \alpha' + DR \cos \alpha''$. Ebenso ist $Rr = BC \cdot \sin \alpha + CD \cdot \sin \alpha' + DR \sin \alpha''$; daher $AR = AR' = \sqrt{(Rr)^2 + (Ar)^2}$. Die Anzahl Grade, welche dieser Bogen AR enthält, ist offenbar dem Unterschiede der geographischen Breiten seiner Endpuncte gleich. Die Länge des Bogens sey l, die Anzahl Grade n. Man hat dann die Proportion n : 2 Rechte $= l : \pi R$. Hieraus folgt der mittlere Halbmesser der Erde $= R = \frac{2 \text{ Rechte} \cdot l}{n \cdot \pi}$.

§. 7.

Dieser so berechnete Werth von R ist allerdings noch sehr unvollkommen; er kann jedoch schon dazu dienen, um die bei der Basis AF vernachlässigte Reduction auf die Meeresfläche zu berechnen. Wie dieses geschieht, ist bereits in dem ersten Abschnitte angegeben worden.

Um einen genaueren Werth von R zu finden, schlage man nunmehr folgendes Verfahren ein.

Man berechne zuvörderst die geographischen Breiten der Puncte F, G, R (Fig. 2.) ihre Längenunterschiede, und

Digitized by Google

die Neigungen der Dreiecksseiten gegen die Meridiane ihrer Endpuncte auf folgende Art.

In Fig. 3 sey AB eine der Dreiecksseiten (z. B. die Basis) in Theilen des = 1 gesetzten Halbmessers ausgedrückt, und also ein kleiner Bruch. Der Winkel α, welchen diese Linie mit dem Meridiane AC bildet, d. h. das Azimuth, so wie die geographische Breite des Punctes A seyen durch astronomische Beobachtung gefunden *). Es fragt sich nun, wie findet man, die Erde als Kugel angesehen, durch blose Rechnung den Winkel MBC = α' (welchen die Verlängerung der Seite AB mit dem Meridiane des Punctes B bildet), so wie die Länge und Breite des Punctes B. Die Breite von A sey = β, die von B = β', die Länge von A sey = L, die Länge von B = L', die Seite AB sey = c, die Seite AC = b, und die Seite CB = a. Den Winkel CBN, welcher entsteht, wenn man den Winkel BAC in den Winkel CBM überträgt und ihn = NBM macht, nennt man die Convergenz der Meridiane von A und B. Diese Convergenz ist also = $\alpha' - \alpha$.

Aus der sphärischen Trigonometrie ist bekannt, dafs

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad \text{(I.)}$$

Die Seite a läfst sich hierbei immer durch die Reihe $a = b + Pc + Qc^2 + \ldots$ **) ausdrücken, in welcher Reihe die Coefficienten P, Q .... völlig unbestimmt sind. Aus $a = b + (Pc + Qc^2)$ folgt aber

$$\cos a = \cos b \cdot \cos(Pc + Qc^2) - \sin b \cdot \sin(Pc + Qc^2). \quad \text{(II.)}$$

Bekanntlich ist: $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots$

*) Ueber die Bestimmung des Azimuths durch astronomische Beobachtung s. d. elften Abschnitt.

**) Die höheren Potenzen von c können wir vernachlässigen, weil c ein kleiner Bruch ist.

Digitized by Google

daher: $\cos (Pc + Qc^2) = 1 - \frac{P^2 c^2}{2}$;

$\sin (Pc + Qc^2) = Pc + Qc^2$;

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung (II.), so folgt:

$$\cos a = \cos b \left(1 - \frac{P^2 c^2}{2}\right) - \sin b \,(Pc + Qc^2) =$$

$$\cos b - \cos b \,\frac{P^2 c^2}{2} - \sin b \,.\, P \,.\, c - \sin b \,.\, Q \,.\, c^2 =$$

$$\cos b - c \,.\, P \,.\, \sin b - c^2 \left(\frac{P^2 \cos b}{2} + Q \,.\, \sin b\right) \text{(III.)}$$

Aus der Gleichung (I.) folgt ferner:

$$\cos a = \cos b \,.\, \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + c \,.\, \sin b \,.\, \cos \alpha, \text{ oder}$$

$$\cos a = \cos b + c \,.\, \sin b \,.\, \cos \alpha - \left(\frac{c^2 \,.\, \cos b}{2}\right) \text{(IV.)}$$

Die Werthe von III und IV müssen identisch und die Factoren der gleichen Potenzen von c gleich seyn. Daher $-P \sin b = \sin b \,.\, \cos \alpha$ oder

$$P = -\cos \alpha \quad \text{(V.)}$$

Ferner ist: $\frac{\cos b}{2} = \frac{P^2 \,.\, \cos b}{2} + Q \,.\, \sin b$; $Q = \frac{\cot b}{2} - \frac{P^2 \,.\, \cot b}{2}$

$$= \frac{\cot \,.\, b\,(1 - P^2)}{2} = \frac{\cot b\,(1 - \cos^2 \alpha)}{2};$$

$$Q = \frac{\cot b \,.\, \sin^2 \alpha}{2} \quad \text{(VI.)}$$

Folglich: $a - b = Pc + Qc^2 = -c \,.\, \cos \alpha + \frac{\cot b \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, c^2}{2}$

Dieses a — b ist in Theilen des Radius ausgedrückt. Will man es in Secunden finden, so mufs man seinen Werth durch sin 1″ dividiren *); daher

$$a - b \text{ in Secunden} = -c \,\frac{\cos \alpha}{\sin 1''} + \frac{\cot b \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, c^2}{2 \,.\, \sin 1''.}$$

*) M sey ein Bogen eines Kreises, m bezeichne den Werth dieses Bogens, wenn man ihn in Theilen des Halbmessers ausdrückt, und n sey die Zahl der diesem Bogen entsprechenden Secunden. Man

Digitized by Google

Setzen wir statt a seinen Werth $= \mathfrak{R} - \beta'$, statt b seinen Werth $= \mathfrak{R} - \beta$ (wo $\mathfrak{R}$ den rechten Winkel bezeichnet) *) und bedenkt man, dafs c in Theilen des Radius ausgedrückt ist, also $= \frac{S}{R}$ gesetzt werden mufs, (wo R den Halbmesser der Erde, und S die Anzahl der Klaftern bedeutet, welche in c enthalten sind), so folgt:

$$\mathfrak{R} - \beta' = \mathfrak{R} - \beta - \frac{S \cdot \cos \alpha}{R \cdot \sin 1''} + \frac{\cot (\mathfrak{R} - \beta) \sin^2 \alpha \cdot S^2}{2 R^2 \sin 1''}, \text{ oder}$$

$$\beta' = \beta + \frac{S}{R} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin 1''} - \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \alpha \cdot S^2}{2 R^2 \cdot \sin 1''} \quad \text{(VII.)}$$

§. 8.

Gehen wir jetzt zur Bestimmung des Winkels $C = L' - L$ über.

Bekanntlich ist $\frac{\sin . \alpha}{\sin . a} = \frac{\sin . C}{\sin . c}$. Es sey $\sin a =$

$$\sin b + pc + qc^2 + \ldots$$

daher $\sin C = \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\sin a} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin b + pc + qc^2}$

$$= \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin b \left(1 + \frac{p}{\sin b} c + \frac{q}{\sin b} c^2\right)}$$

$$= \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin b} \left(1 - \frac{p}{\sin b} c - \frac{q}{\sin b} c^2 + \frac{p^2 c^2}{\sin^2 b}\right) \text{ oder:}$$

$$\sin C = \frac{\sin \alpha}{\sin b} c - \frac{p \cdot \sin \alpha}{\sin^2 b} c^2 \quad \text{(VIII.)}$$

---

hat dann offenbar die Proportion; Arc $1'' : m = 1'' : n'' = 1 : n$. Es kann aber arc $1''$ mit $\sin 1''$ verwechselt werden, daher $\sin 1'' : m = 1 : n$. Hieraus folgt: $m = n \cdot \sin 1''$, $n = \frac{m}{\sin 1''}$, d. h. die Anzahl der einem Bogen angehörigen Secunden ist gleich den diesem Bogen entsprechenden Theilen des Halbmessers, dividirt durch $\sin 1''$.

*) Wir werden in Zukunft den rechten Winkel immer durch das grofse deutsche $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

Digitized by Google

Es ist aber $a = b + Pc + Qc^2$, daher $\sin a = \sin b \left(1 - \frac{P^2 c^2}{2}\right) + \cos b \,(Pc + Qc^2)$, und weil die beiden Werthe von sin a identisch seyn müssen, so ist $p = P \cdot \cos b$, $q = Q \cos b - \frac{P^2 \cdot \sin b}{2}$, oder wenn wir die Werthe V und VI substituiren, $p = -\cos b \cdot \cos \alpha$, $q = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 b}{2 \cdot \sin b} - \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 b}{2 \cdot \sin b}$. Ferner ist bekanntlich $\sin C = C \sin 1'' - \frac{C^3 \sin^3 1''}{1.2.3}$, oder auch $\sin C = C \sin 1'' - \frac{\sin^3 C}{1.2.3}$. Wir haben demnach: $C \sin 1'' = \sin C + \frac{\sin^3 C}{2.3}$. Substituiren wir statt $\sin^3 C$ seinen Werth aus VIII, so erhalten wir für $\sin^3 C$ lauter Theilsätze, welche mit höhern Potenzen von c multiplicirt sind, daher ist $C \cdot \sin 1'' = \sin C$, oder: $C \sin 1'' = \frac{\sin \alpha}{\sin b} \left\{ c - \frac{p \cdot c^2}{\sin b} \right\}$. Substituiren wir hierin den obigen Werth für p, so kömmt:

$$C = \frac{\sin \alpha}{\sin b \cdot \sin 1''} \left\{ c + \frac{\cos b \cdot \cos \alpha}{\sin b} c^2 \right\} \text{ oder}$$

$$C = \frac{\sin \alpha}{\sin b \cdot \sin 1''} \left\{ c + \cot b \cdot \cos \alpha \cdot c^2 \right\} \quad \text{(IX.)}$$

Nehmen wir in diesem Ausdruck dieselben Substitutionen vor, wie in dem Werthe für $a - b$, so kömmt endlich:

$$L' - L = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \sin 1''} \left\{ \frac{S}{R} + \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha \cdot \frac{S^2}{R^2} \right\} \quad \text{(X.)}$$

§. 9.

Bestimmen wir nun endlich die Convergenz $\alpha' - \alpha$. Die sphärische Trigonometrie lehrt, dafs $\sin \alpha \cdot \cot \gamma = \cot b \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos \alpha$, wo wir durch γ den Winkel ABC bezeichnen. Es ist also: $\cot \gamma = \frac{\cot b \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Digitized by Google

Es ist aber auch $\cot \gamma = \frac{1}{\text{tg} \cdot \gamma} = \frac{1}{\text{tg}(2\Re - \alpha')} = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha'}$,

daher $\text{tg}\,\alpha' = \frac{-\sin\alpha}{\cot b \,.\, \sin c - \cos c \,.\, \cos\alpha}$

$= \frac{-\sin\alpha}{\cot b \left(c - \frac{c^3}{2.3}\right) - \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)\cos\alpha}$

$= \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha + \cot b \,.\, c + \frac{c^2}{2}\cos\alpha} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{1 - \left(c\,\frac{\cot . b}{\cos\alpha} + \frac{c^2}{2}\right)}$

$= \text{tg}\,\alpha \left\{1 + c\,\frac{\cot b}{\cos\alpha} + \frac{c^2}{2} + c^2\,\frac{\cot^2 b}{\cos^2\alpha}\right\}$, oder,

wenn wir $\frac{\cot b}{\cos\alpha} = g$, $\frac{\cot^2 b}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2} = h$ setzen, $\text{tg}\,\alpha'$

$= \text{tg}\,\alpha \,\{1 + gc + hc^2\}$.

Bekanntlich ist: $\text{tg}\,(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha' - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha' \,.\, \text{tg}\,\alpha}$

$= \frac{\text{tg}\,\alpha\,(gc + hc^2)}{1 + \text{tg}^2\alpha\,(1 + gc + hc^2)} = \frac{\text{tg}\,\alpha\,(gc + hc^2)}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \text{tg}^2\alpha\,(gc + hc^2)}$

$= \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha\,(gc + hc^2)}{1 + \sin^2\alpha\,(gc + hc^2)} = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha\,(gc + hc^2) \times$

$[1 - \sin^2\alpha\,(gc + hc^2) + \sin^4\alpha \,.\, g^2 \,.\, c^2]$

$= \sin\alpha \,.\, \cos\alpha\,\{gc + (h - g^2 \,.\, \sin^2\alpha)\,c^2\}$

Bekanntlich ist $\text{tg}\,x = x + \frac{x^3}{3} \ldots$, daher $\text{tg}\,(\alpha' - \alpha)$

$= (\alpha' - \alpha)\sin 1'' + \frac{(\alpha' - \alpha)^3 \sin^3 1''}{3}$. Hieraus folgt: $(\alpha' - \alpha)\sin 1''$

$= \text{tg}\,(\alpha' - \alpha) - \frac{\text{tg}^3\,(\alpha' - \alpha)}{3}$. Da wir die höhern Potenzen von c vernachlässigen, und da $\text{tg}^3\,(\alpha' - \alpha) = \sin^3\alpha \,.\, \cos^3\alpha \,.\, g^3 \,.\, c^3$, so ist $(\alpha' - \alpha)\sin 1'' = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha\,\{gc + (h - g^2\sin^2\alpha)\,c^2\}$. Es ist aber, wenn wir die Werthe von h und g substituiren:

$h - g^2 \,.\, \sin^2\alpha = \frac{\cot^2 b}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\cot^2 b}{\cos^2\alpha} \,.\, \sin^2\alpha = \cot^2 b + \frac{1}{2}$,

Digitized by Google

folglich $\alpha' - \alpha = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \cot b}{\sin 1''} + \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{1}{2} + \cot^2 b\right)$.

Hieraus erhält man nach gehöriger Substitution:

$$\alpha' = \alpha + \frac{S}{R} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\sin 1''} + \frac{S^2}{R^2} \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\beta\right). \text{(XI.)*)}$$

§. 10.

Hat man auf diese Art den Winkel $\alpha' = CBM$ gefunden, so sind auch die Azimuthe aller in B sich vereinigenden Dreiecksseiten bekannt, und man hat also alle nöthigen Dinge, um die Längen und Breiten der übrigen Puncte ebenso aus B zu bestimmen, wie man die Länge und Breite des Punctes B von dem Puncte A aus bestimmt hat, und so kann man bis zum Ende der zwischen den Puncten A und R (Fig. 2.) befindlichen Dreieckskette fortfahren.

Es bezeichne (Fig. 4.) AR′ das zu berechnende Stück des Erdmeridians, A und R seyen die beiden Puncte, deren geographische Breiten durch astronomische Beobachtungen bestimmt worden sind, AB und BC seyen zwei Dreiecksseiten, BI, CL seyen zwei sphärische Perpendikel, welche von den Puncten B und C auf den Meridian PAP′ gefällt sind. Diese Perpendikel, welche man auch Perpendikulären, *Perpendiculaires à la méridienne*, nennt, durchschneiden sich in den Puncten M und M′, wovon jeder um 1 ℜ von dem Meridian entfernt liegt.

Die Stücke AI, AL des Meridians berechne man auf folgende Weise. Man betrachte die Kreise MIM′ und MLM′ als Meridiane und den Kreis PAP′ als Aequator. Es ist dann offenbar $BI = y$ die Breite von B, so wie $CL = y'$ die Breite von C. Der Winkel $CBM' = z$ aber ist dann das

*) In dieser Formel, so wie in den Formeln (VII.) und (X.) hat man statt R den auf die oben angegebene Weise berechneten Werth des Erdhalbmessers zu setzen.

Digitized by Google

Azimuth der Seite (BC = c). Diesen Winkel z finden wir, wenn wir bedenken, dafs der Winkel CBP das wahre Azimuth α' der Seite BC ist, und dafs $z = 2\,\mathfrak{R} - \alpha' - PBI$. Den Winkel PBI finden wir aber durch die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks PIB, in welchem nach einem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie: $\frac{tg\ BI}{tg\ PB} = \cos . PBI = \frac{tg\ y}{tg\ (\mathfrak{R}-\beta)} = \frac{tg\ y}{\cot\ \beta} = tg\ y\ .\ tg\ \beta$, wo β die wahre Breite des Punctes B bezeichnet. Es ist aber nach Formel (VII.), wenn wir darin statt β', β, α die Werthe y', y, z substituiren:

$$y' = y + \frac{S}{R}\,\frac{\cos z}{\sin 1''} - \frac{tg\ y\ .\ \sin^2 z\ .\ S^2}{2\,R^2\ .\ \sin 1''} \quad (A.)$$

Im Puncte A ist y = o. Die Formel (A.) wird daher für diesen Punct $y' = BI = y = \frac{S\ .\ \cos z}{R\ \sin 1''}$. Also ist

$$z = 2\,\mathfrak{R} - \alpha' - \text{arc}\left[\cos = \frac{tg\left(\frac{S\ .\ \cos z}{R\ .\ \sin 1''}\right)}{\cot\ \beta}\right]$$

Da also jetzt z und y bekannt sind, so finden wir den Winkel LM'I, d. h. den Bogen LI, durch die Formel (X.).

$$LI = \frac{\sin z}{\cos y\ .\ \sin 1''}\left\{\frac{S}{R} + tg\ y\ .\ \cos z\ .\ \frac{S^2}{R}\right\} \quad (B.)$$

LI wird durch diese Formel in Secunden ausgedrückt. Man will jedoch diese Linie in Längenmaas haben, und mufs defshalb ihren Werth mit R . sin 1'' multipliciren. Wenn man nämlich blofs durch sin 1'' multiplicirte, so erhielte man LI in Theilen des Halbmessers = 1.

Mit Hilfe der beiden Formeln A und B ist man also im Stande, die sphärischen Coordinaten der Dreiecksuncte A, B, C u. s. f. bis zum Puncte R zu berechnen. Die sphärische Abscisse von R ist = R' A. Haben wir also

Digitized by Google

auf die angegebene Art die Gröfse von R′A gefunden, so ist es nur noch, um die dem Bogen R′A entsprechende Anzahl Grade zu erhalten, erforderlich, die geographische Breite des Punctes R′ zu berechnen. Dieſs geschieht auf folgende Art. In dem rechtwinkligen Dreiecke PRR′ kennt man PR = ℜ — Breite von R, desgleichen ist RR′ als sphärische Ordinate von R durch die vorhergehende Rechnung bekannt. Es ist also $\sin(\text{Breite von R}') = \frac{\sin \text{Breite von R}}{\cos . RR'}$

Wenn der auf die eben vorgetragene Weise gefundene Werth von AR′ statt l in die oben (§. 6.) angegebene Gleichung $R = \frac{2 \text{ Rechten} . l}{n . \pi}$ gesetzt wird, so erhält man einen schon ziemlich genauen Werth des mittleren Erdhalbmessers.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Von den geodätischen Linien.

§. 11.

Es interessirt uns nun hier ferner die Frage, was man eigentlich unter der kürzesten Entfernung zweier Puncte auf der Oberfläche des Erdkörpers zu verstehen habe. Sind die Puncte nur wenige Stunden von einander entfernt, wie dieſs bei den Endpuncten der Basis der Fall ist, so kann natürlich die kürzeste Linie, welche man zwischen ihnen auf der Oberfläche der Erde ziehen kann, für eine gerade Linie angesehen werden. Bei gröſseren Entfernungen ist jedoch diese Linie jedenfalls gekrümmt. Wäre die Erde genau kugelförmig, so ist es einleuchtend, daſs die fragliche krumme Linie ein Bogen eines gröfsten Kreises seyn würde. Die Erde hat aber bekanntlich die Gestalt eines Umdrehungsellipsoids und deſshalb bildet die kürzeste Entfernung zweier Puncte auf der Erdoberfläche eine krumme Linie doppelter Krümmung, wie aus Folgendem erhellen wird.

Fig. 5 stelle die Hälfte der Erdkugel vor, N den Nordpol, S den Südpol. A und B seyen Puncte auf der Erdoberfläche. AD sey die Normale von A, BC die Normale von B.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daſs die Normalen zweier Puncte eines Umdrehungsellipsoids zwar jedenfalls in der Umdrehungsaxe zusammentreffen, daſs sich jedoch nur diejenigen Normalen, welche einem nämlichen

Digitized by Google

Parallelkreise angehören, in einem und demselben Puncte der Umdrehungsaxe vereinigen, und dafs nur diejenigen Normalen, welche einem und demselben Meridian angehören, auch in einer und derselben Ebene liegen. In unserm gegenwärtigen Falle liegen die beiden Puncte A und B weder auf demselben Parallelkreise, noch auf dem nämlichen Meridian. Die Normalen der beiden Puncte liegen also auch nicht in derselben Ebene.

Legen wir nun durch die Normale AD und den Punct B eine Ebene, und ebenso durch die Normale BC und den Punct A eine andere Ebene, so wird die Oberfläche der Erde durch diese beiden Ebenen nach den Linien ASB und AS′B geschnitten. Wäre die Erde eine Kugel, so würden ASB und AS′B eine und dieselbe Linie seyn, und die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Puncten A und B bilden. In unserem gegenwärtigen Falle, bei dem Ellipsoide, geht die Linie der kürzesten Entfernung (geodätische Linie) zwischen den beiden Puncten S und S′ hindurch. Die Richtigkeit dieser Behauptung läfst sich auf folgende Weise darthun.

In Figur 6. sey HG eine feste Linie, A und B zwei Ringe, welche an Puncten befestigt sind, welche tiefer liegen, als diese Linie. ASB sey ein Faden, welcher über die feste Linie HG gelegt und an seinen beiden Enden durch die Ringe A und B gezogen ist, P und P′ seyen Gewichte, welche an den Enden des Fadens befestigt sind, und denselben zu spannen streben. Auf den Punct S wirken also zwei Kräfte P und P′ nach den Richtungen AS und SB. Diese Richtungen lassen sich (wegen des Parallelogramms der Kräfte) in die Richtung FS vereinigen. Dieses FS liegt in der Ebene ASB. Wenn nun FS auf HG nicht senkrecht ist, so läfst sich dieses FS in die beiden Kräfte

Digitized by Google

SE und LS zerlegen, wovon die erste auf HG senkrecht ist, die andere aber auf HG liegt. Da wir HG als unbeweglich annehmen, so wird die Kraft ES zerstört, und es kann also blofs noch die Kraft SL wirken, wodurch demnach der Faden in die Richtung ALB gebracht wird, welche auf HG senkrecht ist, und welches die einzige Lage ist, in welcher der Faden ruhen kann. Hat aber der Faden diese Lage, so ist auch offenbar das zwischen den beiden Puncten A und B enthaltene Stück desselben am kürzesten. Denn die Kathede AL ist jedenfalls kleiner als die Hypothenuse AS, und ebenso die Kathede LB < als die Hypot. SB, daher AL + LB = ALB < ASB.

Das Vorhergehende läfst sich auch auf die geodätische Linie anwenden. Es stelle nämlich ASB in Fig. 5. den Faden ASB in Fig. 6. vor; SE sei die Normale des Punctes S, SF die Richtung, in welcher sich die bei S wirkenden Kräfte vereinigen lassen. Dieses SF liegt in der Ebene ABD.

Denken wir uns durch den Punct S eine tangente Ebene gelegt, und diese durch die Ebene ESF geschnitten, so entsteht die Durchschnittslinie HG, welche mit der Linie HG in Fig. 6. übereinstimmt. ES ist auf HG senkrecht, und stimmt ebenfalls mit ES in Fig. 6. überein. Da SF in Fig. 5. in dem rechten Winkel ESG liegt, und blofs die Kraft nach G zu wirken kann, indem die Kraft, welche in der Richtung SE wirkt, zerstört wird, so mufs sich der Faden AB ein wenig in der Richtung nach G fortbewegen, und zwar so lange, bis die unendlich kleinen, bei S zusammenstofsenden, Elemente desselben auf der Linie HG senkrecht stehen, oder bis SF mit ES zusammengefallen ist.

Bei Fig. 7. liegt S′F′ in der Ebene ABC und in dem

Digitized by Google

rechten Winkel H′S′E′. Dieses S′F′ läßt sich in zwei Kräfte, die in der Richtung S′H′ und S′E′ wirken, zerlegen. Auch hier wird S′E′ zerstört, und nur die andere Kraft kann fortwirken; die Richtung des Fadens, in welcher er ruht, geht also zwischen den Puncten S und S′ hindurch. Wenn aber der Faden ruht, so ist das zwischen A und B enthaltene Stück desselben am kürzesten.

Es stelle nun Fig. 8. den Fall vor, wenn SF mit ES bereits zusammengefallen ist. Der unendlich kleine Theil SM der geodätischen Linie wird also mit der Linie HG, welche, wie wir annehmen, ihre Richtung nicht geändert hat, bei S die rechten Winkel d und c bilden.

Es stelle ferner S″ einen andern Punct der geodätischen Linie vor, und H″G″ sey auf die nämliche Art entstanden, wie HG, so muſs auch hier der unendlich kleine Theil der geodätischen Linie NS″ mit der Linie H″G″ bei S″ die rechten Winkel a und b bilden. Da aber HG und H″G″ im Allgemeinen nicht parallel sind, weil im Allgemeinen die Normalen zweier Puncte des Ellipsoids nicht in einer und derselben Ebene liegen, so muſs das zwischen S und S″ gelegene Stück der geodätischen Linie nothwendig doppelt gekrümmt seyn.

Nur wenn die Puncte A und B auf einem und demselben Meridian oder auf einem und demselben Parallelkreise liegen, so ist die zwischen diesen Puncten enthaltene geodätische Linie eine krumme Linie einfacher Krümmung, wie leicht zu beweisen seyn würde.

§. 12.

Versuchen wir nun, die Differentialgleichungen der geodätischen Linie zu bestimmen, eine Aufgabe, deren Auflösung uns für die Folge von Wichtigkeit seyn wird.

Digitized by Google

Um diesen Zweck zu erreichen müssen wir vorerst die allgemeinen Gleichungen, welche für die kürzesten Linien aller möglichen krummen Flächen passen, mittelst des Variationscalculs bestimmen.

Es sey v ein Differentialausdruck, welcher x, y und z, so wie die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = p\,,\quad \frac{dp}{dx} = q\,,\quad \frac{dq}{dx} = r\,,\ \text{etc.}$$

$$\frac{dz}{dx} = p'\,,\quad \frac{dp'}{dx} = q'\,,\quad \frac{dq'}{dx} = r'\ \text{etc.}$$

enthält, und es sey $\int v\,dx = V$, wobei wir annehmen, dafs y und z von x abhängig seyen. Wir nehmen uns vor, die Relation zwischen den veränderlichen Gröfsen so zu bestimmen, dafs V, zwischen bestimmten Gränzen genommen, ein Minimum werde.

Aus $V = \int v\,dx$ folgt:

$$\partial V = \partial \int v\,dx$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung kann $\partial \int$ mit $\int \partial$ verwechselt werden, daher:

$$\partial V = \int \partial v\,dx$$

v ist eine Function von $x, y, p, q, r \ldots z, p', q', r' \ldots$ folglich ist ihr Differential =

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dp}\right)dp$$
$$+ \left(\frac{dv}{dq}\right)dq + \left(\frac{dv}{dr}\right)dr \ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{dv}{dz}\right)dz + \left(\frac{dv}{dp'}\right)dp' + \left(\frac{dv}{dq'}\right)dq'$$
$$+ \left(\frac{dv}{dr'}\right)dr \ldots\ldots,$$

oder wenn man

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = M\,,\quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = N\,,\quad \left(\frac{dv}{dp}\right) = P\,,$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{dv}{dq}\right) = Q\,,\ \left(\frac{dv}{dr}\right) = R \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = N'\,,\ \left(\frac{dv}{dp'}\right) = P'\,,\ \left(\frac{dv}{dq'}\right) = Q'\,,$$

$$\left(\frac{dv}{dr'}\right) = R' \text{ setzt, so ist:}$$

$$dv = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots$$
$$+ N'\,dz + P'\,dp' + Q'\,dq' + \ldots\ldots$$

Da die Variationen auf dieselbe Weise gefunden werden, wie die Differentiale, so gibt dieser Ausdruck sogleich den Werth von ∂v, wenn man d mit ∂ verwechselt, daher:

$$\partial v = M\,\partial x + N\,\partial y + P\,\partial p + Q\,\partial q + R\,\partial r + \ldots.$$
$$+ N'\,\partial z + P'\,\partial p' + Q'\,\partial q' + R'\,\partial q' + \ldots.$$

Wir können hierbei, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe zu schaden, recht gut annehmen, ∂x sey $= o$, also auch $\partial dx = o$, $\partial d^2x = o$. Es stelle z. B. (Fig. 9.) AF eine krumme Linie vor. In der Nähe derselben befinden sich noch mehrere andere krumme Linien, welche aber alle in verschiedenen Ebenen liegen. Wenn die Linie ABCF unendlich nahe bei ADF liegt, so ist, wenn wir von D auf den unendlich nahe gelegenen Punct C der andern krummen Linie übergehen, $CE = \partial z$, $MO = \partial y$, $PO = \partial x$. Wir können aber auch von dem Puncte D auf den unendlich nahe gelegenen Punct B übergehen, welcher Punct nebst D und P eine Fläche bestimmt, die mit dem Coordinatenplane ZY parallel ist. In diesem Falle ist also $\partial x = o$. Setzen wir nun auch in der obigen Gleichung $\partial x = o$, so folgt:

$$\partial v = N\,\partial y + P\,\partial p + Q\,\partial q + R\,\partial r \ldots.$$
$$+ N'\,\partial z + P'\,\partial p' + Q'\,\partial q' + R'\,\partial r' \ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung $\partial V = \int \partial v\,dx$ erhalten wir:

Digitized by Google

$$\partial V = \int dx \left\{ \begin{array}{l} N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r \ldots \\ + N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' \ldots \end{array} \right\}$$

worin die einzelnen Glieder abgesondert integrirt werden können.

Ferner

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\,\frac{dy}{dx}$$

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\,\frac{dy}{dx}\right)$$

u. s. w.

folglich, da $\partial dx = o$ ist,

$$\partial p = \frac{d\partial y}{dx},$$

$$\partial q = \frac{1}{dx}\, d\,\frac{d\partial y}{dx},$$

$$\partial r = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{dx}\, d\,\frac{d\partial y}{dx}\right),$$

u. s. w.

Diefs gibt ferner

$$\int dx P \partial p = \int P\, d\partial y.$$

Integrirt man diefs theilweise nach der bekannten Formel:

$$\int u\, dw = uw - \int w\, du$$

indem man $u = P$, $w = \partial y$ setzt, so wird

$$\int dx P \partial p = P\partial y - \int dP\, \partial y$$

Ebenso, wenn dx constant angenommen wird,

$$\int dx Q \partial q = \int Q\, d\,\frac{d\partial y}{dx}$$

$$= Q\,\frac{d\partial y}{dx} - \int \frac{dQ \cdot d\partial y}{dx}$$

$$= \frac{Q\, d\partial y}{dx} - \frac{dQ}{dx}\,\partial y + \int \frac{d^2 Q}{dx}\,\partial y;$$

Digitized by Google

$$\int \partial x R \, \partial r = \int R \cdot d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\frac{d\partial y}{dx}\right)$$

$$= \frac{R}{dx}\frac{d^2\partial y}{dx} - \int \frac{dR}{dx}\frac{d^2\partial y}{dx}$$

$$= \frac{R\,d^2\partial y}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\partial y}{dx} + \int \frac{d^2R}{dx}\frac{d\partial y}{dx}$$

$$= \frac{R\,d^2\partial y}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\partial y}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\partial y - \int \frac{d^2R}{dx^2}\partial y$$

und ebenso in Bezug auf z.

Hierdurch verwandelt sich der obige Ausdruck für ∂V in folgenden:

$$\partial V = \left[P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} \ldots\right]\partial y + \left[Q - \frac{dR}{dx} \ldots\right]\frac{d\partial y}{dx}$$
$$+ \left[R \ldots\right]\frac{d^2\partial y}{dx^2} + \ldots.$$
$$+ \left[P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} \ldots.\right]\partial z + \left[Q' - \frac{dR'}{dx} \ldots\right]\frac{d\partial z}{dx}$$
$$+ \left[R' \ldots.\right]\frac{d^2\partial z}{dx^2} + \ldots$$
$$+ \int dx \begin{Bmatrix} \partial y \left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots..\right] \\ + \partial z \left[N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \ldots\right] \end{Bmatrix} + \text{const.}$$

wofür wir zur Abkürzung schreiben:

$$\partial V = S + S' + \int dx \left[T\partial y + T'\partial z\right] + \text{const.}$$

Das Integral soll zwischen bestimmten Gränzen genommen werden, es soll also für gewisse Werthe von x, y, z, welche wir mit x_1 y_1 z_1 bezeichnen, verschwinden. Nennt man daher S_1 und S'_1 diejenigen Werthe, welche S und S' erhalten, wenn darin x_1, y_1 und z_1 statt xyz substituirt werden, so ist:

$o = S_1 + S'_1 + \text{const.}$, folglich $\text{const.} = -(S_1 + S'_1)$

Ferner soll das Integral bis zu anderen bestimmten Werthen x_2 y_2 z_2 von xyz genommen werden. Wir müssen daher

Digitized by Google

diese Werthe in S und S′ substituiren. Bezeichnen wir mit S_2 und S'_2 dasjenige, was S und S′ durch diese Substitution werden, so erhalten wir den Ausdruck

$$\partial V = (S_2 + S'_2) - (S_1 + S'_1) + \int dx\,[T\partial y + T'\partial z].$$

Weil nun, wie gesagt, das Integral zwischen bestimmten Gränzen genommen werden soll, so können die Werthe $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_2\ y_2\ z_2$, welche die veränderlichen Gröfsen am Anfange und Ende haben, keine Variationen erhalten. Da nun $S_1\ S_2\ S'_1\ S'_2$ die Variationen $\partial y_1\ \partial y_2\ \partial z_1\ \partial z_2$ und ihre Differentiale enthalten, so sind jene Gröfsen $= o$, wodurch zwischen bestimmten Gränzen $\partial V = \int dx\,[T\partial y + T'\partial z]$ wird.

Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dafs eine Function nur für solche Werthe der veränderlichen Gröfsen ein Gröfstes oder Kleinstes seyn kann, welche, wenn man sie in den Werth des ersten Differentials dieser Function setzt, dieses in Null verwandeln. Ebenso können wir nachweisen, dafs dasjenige Verhalten zwischen x, y und z, für welches $\partial V = o$ ist, einem Maximum oder Minimum von V entspricht.

Sind nun y und z, und folglich auch ∂y und ∂z, von einander unabhängig, so kann ∂V für alle möglichen Werthe von ∂y und ∂z nicht anders $= o$ werden, als wenn die Coefficienten dieser Gröfsen abgesondert $= o$ sind. Diefs gibt die Gleichungen:

$$T = o\ ;\ T' = o\ ,$$

oder wenn man statt T und T′ ihre Werthe substituirt:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots = o$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \ldots = o$$

Sind dagegen y und z nicht von einander unabhängig,

Digitized by Google

sondern durch eine Gleichung zwischen x, y und z mit einander verbunden, welche wir mit $u = 0$ bezeichnen, so müssen die Variationen δy und δz vermittelst dieser Gleichung bestimmt werden, indem die variirten Werthe von x, y und z derselben ebenfalls Genüge leisten müssen.

Die Gleichung $u = 0$ gibt:

$$0 = du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz,$$

folglich, wenn man die Differentiale mit Variationen verwechselt, und bemerkt, dafs $\delta x = 0$ ist,

$$0 = \left(\frac{du}{dy}\right) \delta y + \left(\frac{du}{dz}\right) \delta z$$

daher:

$$\delta z = - \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)} \delta y$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die Gleichung $\delta V = \int dx \, [T \delta y + T' \delta z]$ in folgende über:

$$\delta V = \int \frac{dx . \delta y}{\left(\frac{du}{dz}\right)} \left[T \left(\frac{du}{dz}\right) - T' \left(\frac{du}{dy}\right) \right].$$

Da nun δy ganz willkührlich ist, so kann δV nicht $= 0$ werden, wenn nicht der inclavirte Theil unter dem Integralzeichen verschwindet, wodurch die Gleichung entsteht

$$0 = T \left(\frac{du}{dz}\right) - T' \left(\frac{du}{dy}\right)$$

oder:

$$T \left(\frac{du}{dz}\right) = T' \left(\frac{du}{dy}\right)$$

Sie wird, wenn man statt T und T' ihre Werthe substituirt:

$$\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \cdots\right] \left(\frac{du}{dz}\right) =$$

$$\left[N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \cdots\right] \frac{du}{dy}. \quad \text{(A.)}$$

Digitized by Google

Dieses ist die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, wenn $u = f(x, y, z) = o$ die Gleichung der krummen Fläche ist, auf welcher die kürzeste Linie gezogen werden soll.

§. 13.

Die Gleichung A läfst jedoch noch eine Vereinfachung zu, wenn wir bedenken, dafs das Quadrat einer Linie = der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen ist. Wenn daher ds das Differential eines Bogens bezeichnet, so ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ oder}$$

$$s = \int dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]} \text{ oder}$$

nach obiger Bezeichnung

$$s = \int dx \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

$$V = s\,,\ v = \sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}$$

Da aber v die Gröfsen y, q, r, s ... z, q', r', s' .... nicht enthält; so sind die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = N = o\,;\ \left(\frac{dv}{dq}\right) = Q = o\,;\ \left(\frac{dv}{dr}\right) = R = o \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = N' = o\,;\ \left(\frac{dv}{dq'}\right) = Q' = o\,;\ \left(\frac{dv}{dr'}\right) = R' = o \text{ u. s. w.}$$

Aus der Gleichung A folgt daher

$$-\frac{dP}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right) = -\frac{dP'}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$-dP\left(\frac{du}{dz}\right) = -dP'\left(\frac{du}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$dP'\left(\frac{du}{dy}\right) - dP\left(\frac{du}{dz}\right) = o$$

Digitized by Google

Es ist aber $P = \left(\frac{dv}{dp}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{dy}{vdx} = \frac{dy}{ds}$

$P' = \left(\frac{dv}{dp'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{dz}{vdx} = \frac{dz}{ds}$

also $dP = d\,\frac{dy}{ds}$ und $dP' = d\,\frac{dz}{ds}$,

daher endlich $d\,\frac{dz}{ds}\left(\frac{du}{dy}\right) - d\,\frac{dy}{ds}\left(\frac{du}{dz}\right) = o$

(I.) oder $\frac{d^2z}{ds^2}\left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{du}{dz}\right) = o$,

oder mit Vertauschung der Buchstaben:

(II.) $\frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{du}{dy}\right) = o$

(I.) und (II.) sind die gesuchten Differential-Gleichungen der kürzesten Linie auf einer krummen Fläche.

§. 14.

Fig. 10. stelle ein Rotationssphäroid vor, ZZ′ sey die Axe der Drehung und zugleich die Axe der z, YY′ sey die Axe der y, und XX′ sey die Axe der x. Es seyen ferner zyx die Coordinaten des Punctes a, m X sey = t, so sind tz Coordinaten der erzeugenden Curve, deren Gleichung wir also durch $\phi(t, z) = o$ bezeichnen können, wo $t = f(z)$ ist. Es ist also die Gleichung der Oberfläche des Rotationssphäroids:

$$x^2 + y^2 = t^2$$

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2$$

(III.) $$x^2 + y^2 - [f(z)]^2 = o = u$$

f(z) muſs hierbei aus der Gleichung der erzeugenden krummen Linie bestimmt werden.

Digitized by Google

Aus der Gleichung (III.) folgen die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x\,;\ \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y$$

Substituiren wir dieselben in die Gleichung (II.) so kömmt:

$$\frac{d^2y}{ds^2} \cdot x - \frac{d^2x}{ds^2}\, y = o$$

Diese Gleichung können wir auch so schreiben:

$$x\,\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} - \left\{ y\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} \right\} = o$$

$$\frac{d \cdot x\,\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{d \cdot y\,\frac{dx}{ds}}{ds} = o$$

$$x\,\frac{dy}{ds} - y\,\frac{dx}{ds} = D,$$

welches eine constante Gröfse bezeichnet.

$$x \cdot dy - y dx = ds \cdot D.$$

Wird diese Gleichung integrirt, so bestimmt sie nebst der Gleichung (III.) die kürzeste Linie auf einem Rotationssphäroide. Die Constanten müssen mittelst der Coordinaten der beiden Puncte bestimmt werden, durch welche die Curve hindurch gehen soll.

Die Constante D bestimmen wir namentlich auf folgende Weise.

In die Gleichung $x dy - y dx = ds \cdot D$ führe man die Polarcoordinaten t und $\phi = m\ xx'$ ein, indem man den Anfang der Coordinaten als Pol annimmt, so ist:

$$x = t \cdot \cos\phi\,,\ y = t \cdot \sin\phi$$
$$dx = \cos\phi \cdot dt - t \cdot \sin\phi \cdot d\phi\,.$$
$$dy = \sin\phi \cdot dt + t \cdot \cos\phi \cdot d\phi$$

Digitized by Google

Substituiren wir die Werthe von x, y, dx und dy in die Gleichung $x\,dy - y\,dx = ds \,.\, D$ so kömmt:

$$t \,.\, \cos\varphi \,.\, x \,.\, \sin\varphi \,.\, dt + t \,.\, \cos\varphi \,.\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi - t \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, dt + t \,.\, \sin\varphi \,.\, t \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi = D \,.\, ds;$$

oder $t^2 \,.\, \cos^2\varphi \,.\, d\varphi + t^2 \,.\, \sin^2\varphi \,.\, d\varphi = D \,.\, ds\,;\; t^2 \,.\, d\varphi = D \,.\, ds\,;\; D = \frac{t^2 \,.\, d\varphi}{ds}$

Es stelle in Fig. 11. P den Pol des Rotationssphäroids vor, AA' sey ein Theil der geodätischen Linie, $A'B$ sey $= ds$, $A'C$ sey ein Stück des Parallelkreises von A', dessen Halbmesser wir $= t$ setzen, $d\varphi$ sey der zum Bogen $A'C$ gehörige Winkel, daher

$$t \,.\, \sin d\varphi = A'C, \quad \text{oder} \quad t \,.\, d\varphi = A'C$$

$\mathfrak{B}$. $PA'B$ sey $= \alpha_1$; $BA'C = \gamma$

daher ist in dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecke $A'CB$

$$\frac{A'C}{A'B} = \cos\gamma = \frac{t\,d\varphi}{ds}.$$

Es ist aber α_1 entweder $= \mathfrak{R} - \gamma$ oder $= \mathfrak{R} + \gamma$, und folglich $\sin\alpha_1$ entweder $= \sin\mathfrak{R} \,.\, \cos\gamma - \cos\mathfrak{R} \,.\, \sin\gamma$
oder $= \sin\mathfrak{R}\cos\gamma + \cos\mathfrak{R} \,.\, \sin\gamma$
also immer $\sin\alpha_1 = \cos\gamma$. Daher

$$\frac{t\,d\varphi}{ds} = \sin\alpha_1$$

$$\frac{t^2 d\varphi}{ds} = t\sin\alpha_1 = D$$

Dieses D ist constant für alle Puncte des Rotationssphäroids.

Wenn daher $A\,A_1\,A_2$ ein durch drei kürzeste Linien gebildetes sphäroidisches Dreieck ist, und man bezeichnet die Halbmesser der durch die Spitzen A, A_1, A_2 ge-

Digitized by Google

henden Parallelkreise durch t, t', t''; die Winkel der Seiten AA_1, A_1A_2, A_2A mit den Meridianen PA, PA_1; PA_1, PA_2; PA_2, PA aber durch α, α'; α', α''; α'', α_1; *) so ist

$$t \sin \alpha = t' \sin \alpha',$$
$$t' \sin \alpha' = t'' \sin \alpha'',$$
$$t'' \sin \alpha'' = t \sin \alpha_1 .$$

§. 15.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

folgt: $$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2y}{b^2x}$$

Die allgemeine Gleichung der Normale ist bekanntlich: $y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x)$, wo $-\frac{dx}{dy}$ die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Normale mit der Axe der x bildet. Bei einem Erdmeridian ist also $-\frac{dx}{dy}$ die Tangente der geogr. Breite, $=$ tang β, wenn wir durch β die geogr. Breite eines Ortes bezeichnen. Wenn wir statt $\frac{dx}{dy}$ seinen Werth setzen, so ist tang $\beta = \frac{a^2y}{b^2x}$. Für den Kreis ist $a = b$, folglich: tg $\beta = \frac{y}{x}$.

Denkt man sich (Fig. 12.) über der Axe des Rotationssphäroids als Durchmesser in dasselbe eine Kugel beschrieben, und von dem Puncte A', dessen geogr. Breite $= A'CB$, eine mit CB paralele Linie gezogen, welche die Kugel in

*) Den Winkel, welchen eine geodätische Linie mit dem Meridian eines ihrer Endpuncte bildet, nennt man das Azimuth dieser Linie.

Digitized by Google

A trifft, so nennt man den Winkel ACB die reducirte Breite des Punctes A'.

Die wahre Breite bezeichnen wir immer durch β, die reducirte durch B.

Bezeichnet x' die Abscisse eines Punctes auf der Oberfläche der in das Sphäroid beschriebenen Kugel, so hat man, wie sich aus der Fig. 12. klar ergibt:

$$\text{tang } \beta = \frac{a^2 y}{b^2 x}; \text{tg B} = \frac{y}{x'}; y = x' \cdot \text{tg B};$$

daher $\text{tg } \beta = \frac{a^2 . x^1}{b^2 x} \text{ tg B}; \frac{\text{tg} . \beta}{\text{tg B}} = \frac{a^2 x^1}{b^2 x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a x'}{b x}$

Aus $x^2 + y^2 = b^2$ folgt $x^1 = \sqrt{b^2 - y^2}; a x' = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2}.$

Setzen wir den Werth von $a x'$ in die Gleichung:

$$\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg B}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a x'}{b x}$$

und ebenso den aus der Gleichung der Ellipse gezogenen Werth von

$b x = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2}$, so folgt $\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg B}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2}}{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2}} = \frac{a}{b}$,

daher $\text{tang } \beta = \frac{a}{b} \text{ tang B}$ und $\text{tg B} = \frac{b}{a} \text{ tg } \beta.$

Substituiren wir in die letzte Gleichung statt $\text{tg } \beta$ den Werth $\frac{a^2 y}{b^2 x}$, so folgt: $\text{tg B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{\sin B}{\cos B}$;

$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} = \frac{\sin^2 B}{1 - \sin^2 B}$; $a^2 y^2 = (b^2 x^2 + a^2 y^2) \sin^2 B.$

Es ist aber $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, also $a^2 y^2 = a^2 b^2 \sin^2 B$;

$y^2 = b^2 \sin^2 B$. $y = b \sin B$; $\frac{y}{b} = \sin B$. Setzen wir dieses n die Gleichung

$\frac{a y}{b x} = \text{tg B}$, so folgt: $\frac{a}{x} \sin B = \text{tg B}$; $x = a \cos B.$

Digitized by Google

Es bezeichnen nun $\alpha\alpha'$, die Azimuthe der geodätischen Linie bei A und A', t, t' die Halbmesser der zu den Puncten A und A' gehörigen Parallelkreise, BB_1 die reducirten Breiten dieser Puncte. Statt t können wir auch x setzen, oder wenn das Rotationssphäroid ein elliptisches ist, den Werth von $x = a \cos B$. Ebenso ist $t' = a \cos B_1$. Wie wir oben gesehen haben, ist aber:

$$D = t \sin \alpha = t' \sin \alpha',$$

Die in der einen Gleichung der geodätischen Linie vorkommende Constante D ist also für das Umdrehungsellipsoid $= a \cos B \sin \alpha = a \cdot \cos B_1 \sin \alpha'_1$.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Von der Triangulation.

Erstes Capitel.

Von den Dreiecken des ersten Rangs.

§. 16.

Die auf die Basismessung zunächst folgende geodätische Operation besteht darin, dafs man das zu vermessende Land mit einem Netze grofser Dreiecke überzieht, deren einzelne Seiten wenigstens 10,000 bis 12,000 Grofsherzogl. Hess. Klafter lang seyn müssen. Wir wollen diese Dreiecke die Dreiecke des ersten Rangs nennen. Mit diesen werden sodann kleinere Dreiecke (die Dreiecke des zweiten Rangs) in Verbindung gesetzt, und ebenso müssen sich an die Dreiecke des zweiten Rangs die Dreiecke des dritten Rangs, und an die letzteren die Dreiecke des vierten Rangs anschliefsen und zwar so, dafs die Dreieckspuncte ersten Rangs auch zugleich Dreieckspuncte zweiten, dritten und vierten Rangs, die Dreieckspuncte des zweiten Rangs auch zugleich Dreieckspuncte des dritten und vierten Rangs, und endlich die Dreieckspuncte des dritten Rangs auch zugleich Dreieckspuncte des vierten Rangs bilden.

Zu Winkelspitzen der grofsen Dreiecke oder zu den Standörtern der Winkelmessung dienen hohe Kirch- und Schlofsthürme, besonders solche, die mit Durchsichten, Plate-

Digitized by Google

formen oder Gallerien versehen sind. Meistens reichen jedoch die natürlichen Richtobjecte nicht aus, oder sie geben keine Dreiecke von guter (nahe gleichseitiger) Gestalt. Diesen Mangel ersetzt man dann durch künstliche Signale, welche man am besten auf Hügeln oder Bergen errichtet, und welche natürlich bei den Dreiecken des ersten Rangs gröfser seyn müssen, als bei den Dreiecken des zweiten Rangs u. s. f.

Die Winkel der Dreiecke höherer Ordnung müssen mit gröfserer Genauigkeit gemessen werden, als die Winkel der Dreiecke niederer Ordnung, indem ein bei der Winkelmessung eines grofsen Dreiecks begangener Fehler auch einen gröfseren Einflufs auf die Länge der Seiten ausübt, als ein in einem kleineren Dreiecke vorgefallener Fehler.

Die Winkel der Dreiecke des ersten Rangs müssen mit Repetitionstheodoliten wenigstens zwanzigmal gemessen werden.

§. 17.

Wenn man bei der Beobachtung der Winkel gehindert ist, den Theodoliten im Mittelpuncte der Station aufzustellen, was z. B. auf Kirchthürmen sehr häufig vorkommt, so hat man auf folgende Art zu verfahren. Man wählt sich in diesem Falle ganz in der Nähe des eigentlichen Stationspunctes C (Fig. 13.) einen Ort O, von wo aus man die Messung eines Winkels $bOa = o$, so wie des Winkels $COb = r$ und der Entfernung des Punctes O vom Puncte C ungehindert vornehmen kann. Sind uns aufserdem auch noch die Gröfsen der Seiten $bC = A$ und $aC = B$ gegeben, so können wir den gesuchten Winkel leicht berechnen. Es ist nämlich $\mathfrak{W}.\ bMa = \mathfrak{W}.\ z = o + x = c + y$; daher $o + x = c + y$; $c = o + x - y$.

Digitized by Google

Es findet ferner die Proportion statt

$$\text{Seite } aC : D = \sin(o + r) : \sin x.$$

Ebenso

$$bC : D = \sin r : \sin y$$

Hieraus fliefst:

$$\sin x = \frac{D \cdot \sin(r + o)}{Ca};$$

$$\sin y = \frac{D \cdot \sin r}{bC}$$

Da aber die Winkel x und y sehr klein sind, indem die Entfernung des Beobachtungsortes O vom eigentlichen Stationspuncte (dem s. g. Centrum) so klein wie möglich angenommen werden mufs, so kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$x = \frac{D \cdot \sin(r + o)}{Ca}$$

$$y = \frac{D(\sin r)}{Cb}$$

x und y sind hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Will man sie in Secunden haben, so mufs man bekanntlich (§. 7.) ihren Werth durch sin 1″ dividiren. Wir erhalten sofort durch Substitution

$$\text{Winkel } c = o + \frac{D \cdot \sin(o + r)}{Ca \cdot \sin 1''} - \frac{D \sin r}{Cb \cdot \sin 1''}$$

Liegt der Beobachtungsort auf der linken Seite von C (Fig. 14.), so ist $z = c + x = o + y$; also $c + x = o + y$ oder $c = o + y - x$

Liegt der Beobachtungsort innerhalb des Winkels c (Fig. 15.), so ist $\alpha = s + y$; $\beta = t + x$; daher $\alpha + \beta = s + y + t + x$, oder (da $\alpha + \beta = \mathfrak{W}.\ o$ und $s + t = \mathfrak{W}.\ c$), $o = c + x + y$, also $c = o - x - y$

Liegt endlich der Beobachtungsort hinter dem Puncte c

Digitized by Google

(Fig. 16.), so ist $s = r + y$ und $t = q + x$, folglich $s + t = c = r + q + y + x$ oder $c = o + y + x$

Bei der Reduction der Winkel auf das Centrum der Station kann man sich folgenden Formulars bedienen, in welchem die mit „Signal links" bezeichnete Spalte die Gröfse y, die mit „Signal rechts" bezeichnete dagegen die Gröfse x gibt. Der Richtungswinkel unter „Signal links" bezeichnet den Winkel r (Fig. 13.), der Richtungswinkel unter „Signal rechts" aber den Winkel $(r + o)$.

Station: Baumbach. Distanz = 0,92 Klafter.	Signal links: Darmstadt (luth. Kirchth.) Richtungswinkel = 87°, 67′.	Signal rechts: Steinberg. Richtungswinkel = 157°, 32′.
Compl. log sin 1″ (neue Th.)	5,80388 — 10	5,80388 —
log. Entfern. vom Centrum	9,96379 — 10	9,96379 — 10
Compl. log. Entf. v. Signal	7,18654 — 10	7,18552 — 10
log. sin. Richtw.	9,99180 — 10	9,79331 — 10
log. Excentr. (in Sec.)	2,94601 — 10	2,69650 — 10
Excentr. (in Sec.)	— 8,83	+ 4,97

§. 18.

Bei den Dreiecken des ersten Rangs findet immer ein kleiner sphärischer Excefs von einigen Secunden statt. Dafs wir diesen auch durch die unmittelbare Messung der Winkel finden, obgleich die Dreieckspuncte nicht auf der Meeresfläche liegen, hat, wie man leicht einsieht, darin seinen Grund, weil der Theodolit, womit die Winkel gemessen werden, in jedem der drei Puncte horizontal gestellt wird, und weil das Fernrohr sich in einer auf die Erdoberfläche normalen Ebene bewegt, so wie in dem Umstande, dafs in den drei Puncten die auf die Scheibe des horizontal gestellten Theodolits gefällten Perpendikel bei den gröfseren Dreiecken nicht mehr

Digitized by Google

mit einander parallel sind, was bei kleineren Dreiecken immer angenommen werden kann.

Ungeachtet dieses sphärischen Excesses kann man doch die Dreiecke ersten Rangs wie gradlinige auflösen, und zwar nach folgender Regel. Man berechne den sphärischen Excefs des Dreiecks, ziehe von jedem seiner Winkel ⅓ dieses Excesses ab, so werden die Reste die Winkel eines gradlinigen Dreiecks seyn, dessen Seiten den Seiten des sphärischen gleich sind.

Dieses merkwürdige Theorem, welches unter dem Namen des Legendre'schen Satzes bekannt ist, läfst sich auf folgende Art beweisen.

Die sphärische Trigonometrie lehrt, dafs

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \,.\, \sin c},$$

wo die Seiten a, b, c in Winkelmafs ausgedrückt sind. Substituiren wir in dem zweiten Gliede dieser Gleichung statt des Sinus und des Cosinus die bekannten Reihen dieser trigonometrischen Functionen, und behalten wir darin nur die Glieder bis zur vierten Potenz bei, was uns jedenfalls gestattet ist, da a b und c in Vergleichung mit dem Halbmesser der Erde nur sehr kleine Gröfsen sind, so kömmt:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{2.3.4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{2.3.4}\right)}{\left(b - \frac{b^3}{2.3}\right)\left(c - \frac{c^3}{2.3}\right)},$$

in welchem Ausdruck jetzt a, b und c in Theilen des Halbmessers ausgedrückt sind. Führen wir die angedeutete Multiplication aus, so folgt:

Digitized by Google

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - 1 + \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{2.3.4} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^4}{2.3.4}}{bc\left(1 - \frac{c^2}{2.3} - \frac{b^2}{2.3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{2.3.4} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^4}{2.3.4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2.3} - \frac{b^2}{2.3}\right)^{-1}}{b.c} =$$

Entwickeln wir $\left(1 - \frac{c^2}{2.3} - \frac{b^2}{2.3}\right)^{-1}$ nach der Formel $(1-b)^2 = 1 + b + b^2 + b^3$, so folgt:

$$\cos A = \frac{\left(-\frac{a^2}{2} \cdots\cdots - \frac{b^4}{2.3.4}\right)\left(1 + \frac{c^2}{2.3} + \frac{b^2}{2.3} + \frac{c^4}{4.9} + \frac{2c^2b^2}{4.9} + \frac{b^4}{4.9}\right)}{bc.}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b.c.} + \frac{a^4 + c^4 + b^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2b^2a^2}{2.3.4.b.c.} \quad (M.)$$

Denken wir uns nun ein ebenes Dreieck, dessen Seiten = den sphärischen Seiten a, b, c*) und dessen Winkel = A′, B′, C′ sind, so ist in diesem ebenen Dreieck $\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$. Es ist aber $\sin {}^2A' = 1 - \cos {}^2A' =$

$$\frac{-b^4 - a^4 - c^4 + 2b^2a^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2}{4b^2c^2}.$$

Wir erhalten daher aus M:

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc \,.\, \sin {}^2A'}{2.3}$$

Da bc, wie gesagt, in Längenmaafs gegeben sind, so muſs man, um sie in dem nämlichen Maafs, wie cos A, nämlich in Theilen des Halbmessers, auszudrücken, statt bc die Werthe $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ setzen, daher folgt:

*) a, b, c sind hier in Längenmaafs ausgedrückt.

Digitized by Google

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc \cdot \sin {}^2A'}{2.3.R^2} \quad \text{oder}$$

$$\cos A = \cos A' - \sin A' \cdot \frac{bc \cdot \sin A'}{2.3.R^2}$$

Setzen wir $\frac{b.c.\sin A'}{2.3.R^2} = E$, eine Gröfse, welche in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist. Wollen wir dieses E in Secunden ausdrücken, so müssen wir setzen: $\frac{E}{\sin 1''}$ der Sinus hiervon d. i. $\sin\left(\frac{E}{\sin 1''}\right)$ wird wiederum $= E$ seyn. Die Zahl 1 können wir $= \cos\left(\frac{E}{\sin 1''}\right)$ setzen, und wir erhalten daher durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung für Cosinus A:

$$\cos A = \cos A' \cos\left(\frac{E}{\sin 1''}\right) - \sin A' \cdot \sin\left(\frac{E}{\sin 1''}\right)$$

$$= \cos\left(A' + \frac{E}{\sin 1''}\right), \text{ also}$$

$$A = A' + \frac{E}{\sin 1''} = A' + \frac{bc \cdot \sin A'}{2.3.R^2 \sin 1''}$$

oder näherungsweise:

$$A = A' + \frac{bc \cdot \sin A}{2.3.R^2 \sin 1''}$$

$$A' = A - \frac{bc \cdot \sin A}{2.3.R^2 \sin 1''}$$

Der sphärische Excefs ist bei einem Dreieck, dessen Winkel A, B und C heifsen, bekanntlich

$$= A + B + C - 2\,\mathfrak{R}.$$

$$= 2 \cdot 400^0. \frac{\text{Inhalt des Dreiecks}}{\text{Oberfl. der Kugel}} . =$$

Digitized by Google

$$= \frac{\text{Inhalt des Dreiecks}}{4\,(2\,R)^2\,\frac{1}{4}\,\pi} \,.\, 2\,.\, 400^0 =$$

$$\frac{\text{Inhalt des Dreiecks}}{(2\,R)^2\,\pi} \,.\, 2\,.\, 400^0 =$$

$$\frac{\text{Inhalt des Dreiecks}\,.\,200^0}{R^2\,\pi} = E'.$$

Will man diese Gröfse, welche hier in Graden ausgedrückt ist, in Secunden ausdrücken, so mufs man die beiden Seiten der Gleichung:

$$E' = \frac{\text{Inhalt des Dreiecks}\,.\,200^0}{R^2\,.\,\pi}$$

mit 10000 multipliciren. Daher

$$E' \text{ in Secunden} = \frac{\text{Inhalt des } \triangle\,.\,200\,.\,10000}{R^2\,.\,\pi\,.}$$

Es ist aber $\pi = \frac{\text{Halbkreis}}{\text{Radius}} = \frac{\text{Secunden des Halbkreises}}{\text{Secunden des Radius}} =$

$= \frac{200\,.\,10000}{1/\sin 1''} = 200\,.\,10000 \sin 1''$. Folglich Ueberschufs in Secunden $= \frac{\text{Inhalt}}{R^2 \sin 1''}$. Da das gegebene Dreieck von einem gradlinigen sehr wenig verschieden ist, so kann man den Inhalt wie bei einem gradlinigen Dreieck mittels der Formel $\frac{b\,.\,c\,.\,\sin A}{2}$ berechnen, wo b und c in Längenmaafs gegeben sind. Es ist also der sphärische Ueberschufs in Secunden $= \frac{b\,.\,c\,.\,\sin A}{2\,R^2 \sin 1''}$.

Aus der obigen Gleichung $A' = A - \frac{b\,.\,c\,.\,\sin A}{2\,.\,3\,.\,R^2 \sin 1''}$ folgt nunmehr: $A' = A - \frac{1}{3}$ sphär. Exc. Eben so finden

Digitized by Google

wir: $B' = B - \frac{1}{3}$ sphär. Exc. $C' = C - \frac{1}{3}$ sphär. Exc.,

w. z. b. w.

§. 19.

Nach dieser Legendre'schen Regel müssen sämmtliche Dreiecke des ersten Rangs berechnet werden.

Beispiel.

	Bezeichnung der Dreieckspuncte.	Beobachtete Winkel.			Corrigirte Winkel.			Log. Sinus des corrig. W.	Sphärische Winkel.
A.	Taufstein.	72°	28′	38″,7	72°	28′	32″,8	9,9574697	72°,28′,36″,6
B.	Dünsberg.	44	57	37,4	44	57	31,5	9,8091117	44,57,35,3
C.	bei Stammheim.	83	14	41,6	83	14	35,7	9,9845949	83,14,39,5
	Summe Sphär. Excefs.	200	00	17,7 11,4	200	00	00,0		200,00,11,4
	Summe der Fehler.		+	06,3					

AC		AB		Sphärischer Excefs.	
Comp. log. Sin A	0,0425303	» » »	0,0425303	Compl. log. const.	2,6909
Log. BC	4,2642235	» » »	4,2642235	Log. sin A	9,9575
Log. Sin B	9,8091117	Log. Sin C	9,9845949	Log. AC	4,1159
				Log. AB	4,2913
Log. AC	4,1158655	Log. AB	4,2913487	Log. sph. Exc.	1,0556
Seite AC.	13057,66. Kl.	Seite AB	19559,09. Kl.	Sph. Exc.	11,4

Digitized by Google

Die Rechnung wird nämlich in diesem Formulare auf folgende Art ausgeführt.

Ein Drittheil des Ueberschusses der Summe der drei beobachteten Winkel wird von jedem einzelnen beobachteten Winkel abgezogen, um die s. g. corrigirten Winkel zu erhalten. Zu diesen werden die Logarithmen aufgesucht, und mit denselben die Dreiecksseiten berechnet. Nachdem hierauf auch die Berechnung des sphärischen Excesses vollzogen worden, wird derselbe von dem sphärischen Excefs der beobachteten Winkel abgezogen. Ein Drittel der Differenz (oder der Fehlersumme) wird von jedem der beobachteten Winkel subtrahirt, wodurch man sphärische Winkel erhält, welche genauer sind, als die beobachteten.

Diese Berechnung des sphärischen Excesses, welche nach dem Obigen dazu dient, um die Summe der Irrthümer bei der Beobachtung der drei Winkel des Dreiecks zu finden, wird nach der oben angegebenen Formel:

$$\text{sphär. Exc. in Secunden} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2\,R^2 \sin 1''}$$

bewerkstelligt.

Das Complement des Logarithmen der Constante $\frac{1}{2\,R^2 \sin 1''}$ ist auf die nachfolgende Art berechnet worden. Der mittlere Halbmesser der Erde ist = 2546479 Gr. Hess. Klafter, daher

$$\log R = 6{,}4059437$$
$$2$$
$$\log R^2 = 12{,}8118874$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}1961199$$
$$\log 2\,R^2 \sin 1'' = 17{,}3090373$$

Digitized by Google

$$\log \frac{1}{2\,R^2 \sin 1''} = -\,17{,}3090373.$$

Addiren wir hierzu die Zahl 20, so erhalten wir 2,6909627. Natürlich müssen wir hernach von der Summe:
compl. log . const + log sin A + log AC + log AB
die Zahl 20 wiederum abziehen.

Zweites Capitel.

Von den Dreiecken des zweiten, dritten und vierten Rangs.

§. 20.

An das System der Dreiecke ersten Rangs schliefsen sich die Systeme der Dreiecke des zweiten, dritten und vierten Ranges an.

Die Dreiecke der beiden letztern Systeme sind zur Controle der Detailmessung (Flur- und Parzellenmessung) bestimmt, und die Dreiecke des zweiten Rangs bilden das Zwischenglied bei dem Uebergang von den Dreiecken des ersten Rangs zu diesen kleinern Dreiecken. Bei den Dreiecken des zweiten, dritten und vierten Rangs kommt der sphärische Excefs nicht mehr in Betracht.

Hat man sämmtliche Winkel der Dreiecke des zweiten Rangs beobachtet, so wird die Berechnung der Seiten mittels des nachstehenden Formulars vollzogen, in welchem zur Erläuterung die Berechnung des Dreiecks Melbach — Johannisthurm — Bauernheim ausgeführt ist.

Digitized by Google

Namen der Stationen.	Gemessene Winkel.	Mittlere Winkel.	Log. Sin. der mittleren Winkel.	Berechnung der Seiten.			
				(ac)		(ab)	
Melbach (*a*)	78°,26′,25″	78°,26′,26″	9,9741754				
Johannisthurm (*b*)	72,70,55	72,70,55	9,9587979	Cp. log. Sin. a	0,0258246	" "	0,0258246
Bauernheim (*c*)	49,03,18	49,03,19	9,8427792	log. bc	4,4749843	" "	4,4749843
				log. Sin. b	9,9587979	log. Sin. c.	9,8427792
Summe =	199°,99′,98″	200,00,00		log. ac	4,4596068	log. ab	4,3435881
2 R =	200,00,00			ac	28814,2 Kl.	ab	22059,1 Kl.
Fehler	2″						

Digitized by Google

Die beobachteten Winkel eines Dreiecks werden in die zweite Columne dieses Formulars eingeschrieben*) und sodann in der dritten Columne auf zwei Rechte corrigirt, weil in jedem ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel = zwei Rechten seyn muſs. Zu den corrigirten (oder mittleren) Winkeln werden die Logarithmen der Sinusse aufgesucht, und in die vierte Columne eingeschrieben. — Ist dieses geschehen, so wird die Berechnung der Seiten mit Hülfe dieser Logarithmen vorgenommen, wozu natürlich auch der Logarithmus einer Basis nöthig ist. Da in jedem Dreiecksnetze des zweiten Rangs meistens mehrere Seiten vorkommen werden, welche auch zugleich Seiten des ersten Rangs sind **), so macht man bei der Berechnung des ganzen Netzes mit einem solchen Dreiecke den Anfang, in welchem sich eine Seite des ersten Rangs befindet, und nimmt diese als Basis an.

Das Formular zur Berechnung der Seiten gründet sich auf die bekannte Formel

$$\sin a : bc = \sin c : ba = \sin b : ac,$$

wobei wir ein Dreieck im Auge haben, dessen drei Puncte a, b und c heifsen. Aus obiger Proportion folgt:

$$ac = \frac{\sin b \cdot bc}{\sin a}, \quad \text{oder}$$

$$\log ac = \log b + \log bc - \log \sin a =$$
$$= \text{compl. } \log \sin a + \log bc + \log b.$$

Eine der berechneten Seiten des ersten Dreieckes dient

---

*) Sollten in dem Dreiecksnetze des zweiten Ranges irgendwo excentrische Winkel vorkommen, so müssen dieselben zuvor auf die bekannte Weise centrirt werden.

**) Wie man zu verfahren hat, wenn Dieses nicht der Fall seyn sollte, wird weiter unten gezeigt werden.

Digitized by Google

nun wieder einem zweiten daranliegenden zur Basis u. s. f. Wenn man so in einer gewissen Reihenfolge alle Dreiecke des Netzes berechnet, so wird man bisweilen zur Berechnung eines solchen Dreiecks A kommen, in welchem sich aufser der Seite, die es mit dem unmittelbar vorher berechneten Dreiecke B gemein hat, noch eine andere befindet, die auch zugleich einem schon früher berechneten Dreiecke zweiten Rangs C angehört. Wären alle Winkel des Netzes absolut richtig gemessen, so müfste man das nämliche Resultat erhalten, man möchte die den Dreiecken A und C gemeinschaftliche Seite aus einem oder dem andern der beiden an einander liegenden Dreiecke berechnen. Da jedoch eine solche absolute Richtigkeit der Winkel nicht erreicht werden kann, so reicht es hin, wenn die beiden Resultate bis auf einige Zolle übereinstimmen. Ist die Differenz sehr grofs, so mufs irgend ein Fehler untergelaufen seyn, und die Rechnung mufs noch einmal vorgenommen werden.

Solche gemeinschaftliche Seiten dienen also zur Controle der Dreiecksberechnung.

Schliefslich wird hier bemerkt, dafs die Berechnung der Dreiecke dritten und vierten Rangs genau auf dieselbe Weise geschieht, wie die Berechnung der Dreiecke des zweiten Rangs. Denn eben so, wie bei der Berechnung der Dreiecke des zweiten Rangs von den Dreiecken des ersten Rangs ausgegangen wurde, dienen auch bei der Berechnung der Dreiecke dritten Rangs die Dreiecke des zweiten Rangs als Anhaltspuncte, und das nämliche Verhältnifs findet auch bei den Dreiecken des vierten Rangs in Bezug auf die Dreiecke des dritten Rangs statt.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Von der Berechnung der Coordinaten.

Erstes Capitel.

Von den Coordinaten der Dreieckspuncte ersten Range.

§. 21.

Bei einer allgemeinen Landesvermessung ist es sehr wesentlich erforderlich, die gegenseitige Lage aller trigonometrischen Puncte durch Coordinaten zu bestimmen. Man nimmt hierbei den Meridian eines Hauptortes (im Grofsherzogthum Hessen ist dieses der Meridian von Darmstadt) als Abscissenaxe an. Der Bogen, welcher von irgend einem Puncte des Netzes senkrecht auf diesen Meridian gezogen wird, heifst die Ordinate dieses Punctes, und das Stück des Meridians, welches zwischen dem Hauptpuncte (Darmstadt) und dem Fufspuncte jenes Perpendikels enthalten ist, heifst die Abscisse *) Bei so bedeutenden Entfernungen,

*) Die in dem Hauptpuncte nach Osten und Westen hin gezogenen Perpendiculären bilden die Axe der Ordinaten. Durch die beiden sich im Hauptpuncte durchschneidenden Coordinatenaxen wird also das zu vermessende Land in vier Quadranten zerlegt. Wenn man die im nordöstlichen Quadranten gelegenen Coordinaten als positiv ansieht, so sind die Abscissen im südöstlichen Quadranten negativ, die Ordinaten positiv. Im südwestlichen Quadranten sind dann sowohl die Abscissen als die Ordinaten negativ, und im nordwestlichen sind die Ordinaten negativ und die Abscissen positiv.

Digitized by Google

wie sie bei den Dreiecken des ersten Ranges vorkommen, muſs hier schon die elliptische Gestalt der Erde in Betracht gezogen werden. Wir haben zwar schon früher (im zweiten Abschnitte) Formeln zur Coordinatenberechnung entwickelt, es wurde jedoch bei denselben die Annahme gemacht, daſs die Erde die Gestalt einer Kugel habe, und daſs die geographischen Breiten der Puncte, deren Coordinaten bestimmt werden sollen, bereits gegeben seyen, und wir wollen daher nunmehr solche Formeln entwickeln, welche keine Functionen der geographischen Breite sind, und bei welchen die elliptische Gestalt der Erde berücksichtigt wird.

§. 22.

Es sey $NC'B'S$ (Fig. 17.) der Meridian des Hauptortes, BC sey eine Dreiecksseite $= S$; $BB' = P$ sey die Ordinate des Punctes B, $CC' = P'$ sey die Ordinate des Punctes C. Um zuvörderst solche Formeln für die Coordinaten zu finden, welche von der geographischen Breite unabhängig sind, so nehmen wir einstweilen noch einmal an, die Erde sey eine Kugel. Es werden sich dann die Ordinaten P und P', wenn man sie verlängert, in dem Puncte O schneiden, welcher um einen rechten Winkel von $NC'B'S$ entfernt ist. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daſs $B'B$ und $C'C$ bei B' und C' senkrecht auf dem Hauptmeridian stehen. Der Bogen $B'C'$ wird dann gleich dem Winkel O seyn. $NC''BS$ sey der Meridian des Punctes B. Bezeichnen wir ferner den Bogen CC'' durch ΔP; den Winkel $C''BC$ durch α (Azimuth), den Winkel CBO durch $\mathfrak{N} - \alpha$, den Bogen CO durch $\mathfrak{N} - P'$, den Bogen BO durch $\mathfrak{N} - P$. Endlich sey Winkel $BCO = b$.

Man hat also in dem sphärischen Dreieck CBO

Digitized by Google

$$\text{Cos } B = \frac{\cos CO - \cos CB \,.\, \cos OB}{\sin CB \,.\, \sin \,.\, OB}$$

$$\sin CB \,.\, \sin OB \,.\, \cos B = \cos CO - \cos CB \,.\, \cos OB$$

$$\cos CO = \cos CB \,.\, \cos OB + \sin CB \,.\, \sin OB \,.\, \cos B$$

$$\sin P' = \cos S \,.\, \sin P + \sin S \,.\, \cos P \,.\, \sin \alpha$$

Wenn uns gegeben ist $y = f(x)$, so ist bekanntlich

$$y' = f(x+c) = fx + \frac{dy}{dx}c + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{c^3}{1.2.3}.$$

Es sey nun $fx = \sin x$, also $y' = \sin(x+c)$, so ist gegenwärtig

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x \text{ etc.}$$

Also

$$\sin(x+c) = \sin x + c\cos x - \frac{c^2 \,.\, \sin x}{2} - \frac{c^3 \cos x}{2.3} + \ldots$$

$$\sin P' = \sin(P + \triangle P) = \sin P + \triangle P \cos P - \frac{(\triangle P)^2 \sin P}{2} - \frac{(\triangle P)^3 \cos P}{6} + \ldots$$

Ferner ist $\cos S = 1 - \frac{S^2}{2}$

$$\sin S = S - \frac{S^3}{6},$$

wenn man von S und $\triangle P$ keine höhern Potenzen als die dritte beibehält. Es ist also, indem wir aus den beiden Werthen von sin P' eine Gleichung bilden:

$$\cos S \,.\, \sin P + \sin S \,.\, \cos P \,.\, \sin \alpha = \sin \,.\, P + \triangle P \cos P - \frac{(\triangle P)^2 \sin P}{2} - \frac{(\triangle P)^3 \cos P}{6}.$$

Oder, indem wir statt cos S und sin S ihre Werthe substituiren:

Digitized by Google

$$\sin P - \frac{\sin P \cdot S^2}{2} + \cos P \cdot S \cdot \sin \alpha - \frac{\cos P S^2 \sin \alpha}{6} =$$

$$\sin P + \Delta P \cos P - \frac{(\Delta P)^2 \sin P}{2} - \frac{(\Delta P)^3 \cos P}{6}$$

Stellen wir nun ΔP allein auf die eine Seite der Gleichung, so folgt:

$$\Delta P = \frac{\cos P \cdot S \cdot \sin \alpha}{\cos P} - \frac{\sin P \cdot S^2}{2 \cdot \cos P} - \frac{\cos P S^2 \sin \alpha}{6 \cos P}$$

$$+ \frac{(\Delta P)^2 \sin P}{2 \cos P} + \frac{(\Delta P)^3 \cos P}{6 \cos P}$$

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{\operatorname{tg} P \cdot S^2}{2} - \frac{S^2 \sin \alpha}{6} + \frac{(\Delta P)^2 \operatorname{tg} P}{2} + \frac{(\Delta P)^3}{6}$$

Da P nicht leicht über einige Grade betragen wird, so können wir näherungsweise $\operatorname{tg} P = P$ setzen, und wir erhalten daher

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{P \cdot S^2}{2} - \frac{S^2 \cdot \sin \alpha}{6} + \frac{(\Delta P)^2 P}{2} + \frac{(\Delta P)^3}{6} =$$

$$S \cdot \sin \alpha - \frac{P (S^2 - \Delta P^2)}{2} - \frac{S^2 \cdot \sin \alpha}{6} + \frac{\Delta P^3}{6}$$

In dem Dreiecke C″CB ist der Winkel C″ beinahe ein rechter. Wenn wir ihn als einen rechten annehmen, so ist $S \cdot \sin \alpha =$ der gradlinigen Entfernung von C″ nach C, welche wir durch Δp bezeichnen.*) Es ist also $S = \frac{\Delta p}{\sin \alpha}$.

Setzt man in dem vorletzten Gliede der obigen Gleichung statt S diesen genäherten Werth, so folgt:

$$\Delta P = S \sin \alpha - \frac{P (S^2 - \Delta P^2)}{2} - \frac{S^2 \cdot \left(\frac{\Delta p}{\sin \alpha}\right) \sin \alpha}{6} + \frac{(\Delta P)^3}{6}$$

*) Ebenso ist $S \cdot \cos \alpha =$ der gradlinigen Entfernung von C″ nach $B = \Delta m$.

Digitized by Google

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{P(S^2 - \Delta P^2)}{2} - \frac{S^2 \Delta p}{6} + \frac{\Delta P^3}{6},$$

oder indem man näherungsweise Δp statt ΔP schreibt:

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{P(S^2 - \Delta p^2)}{2} - \left(\frac{S^2 - (\Delta p)^2}{2}\right) \frac{\Delta p}{3}$$

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \left(\frac{S^2 - (\Delta p^2)}{2}\right) \left(P + \frac{\Delta p}{3}\right) \quad (I.)$$

§. 23.

In dem Dreiecke COB hat man ferner:

$$\text{cosin } B \cdot \cos OB + \cot O \cdot \sin B = \cot CB \cdot \sin OB$$

$$\cot O = \frac{\cot CB \cdot \sin OB - \cos B \cdot \cos OB}{\sin B},$$

$$\text{tg } O = \frac{\sin B}{\cot CB \cdot \sin OB - \cos B \cdot \cos OB},$$

Multipliciren wir Zähler und Nenner durch tg CB, so kömmt:

$$\text{tg } O = \frac{\text{tg } CB \cdot \sin B}{\text{tg } CB \cdot \cot CB \cdot \sin OB - \text{tg } CB \cos B \cdot \cos OB}.$$

Es ist aber $\text{tg } CB \cdot \cot CB = 1$, also

$$\text{tg } O = \frac{\text{tg } CB \cdot \sin B}{\sin OB - \text{tg } CB \cos B \cdot \cos OB}$$

$$\text{tg } \Delta M = \frac{\text{tg } S \cdot \cos \alpha}{\cos P - \text{tg } S \sin \alpha \sin P} = \frac{\text{tg } S \cdot \cos \alpha}{\cos P (1 - \text{tg } S \cdot \sin \alpha \text{ tg } P)} =$$

$$\frac{\text{tg } S \cdot \cos \alpha}{\cos P} (1 - \text{tg } S \cdot \sin \alpha \cdot \text{tg } P)^{-1}$$

Die Reihe für tg x ist bekanntlich

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{5.7.9} + \frac{62x^9}{5.7.9.9} + \cdots$$

Es ist daher, wenn wir keine höhere Potenz von ΔM als die dritte beibehalten:

Digitized by Google

$$\text{tg } \triangle M = \triangle M + \frac{(\triangle M)^3}{3} \cdot$$

$$(1 - \text{tg } S \cdot \sin \alpha \cdot \text{tg } P)^{-1}$$

ist näherungsweise

$$= 1 + \text{tg } S \cdot \sin \alpha \text{ tg } P,$$

daher

$$\triangle M + \frac{(\triangle M)^3}{3} = \frac{\text{tg } S \cdot \cos \alpha \ (1 + \text{tg } S \cdot \sin \alpha \cdot \text{tg } P)}{\cos P}$$

Setzen wir statt tg S, tg P und cos P ihre genäherten Werthe, so folgt:

$$\triangle M + \frac{(\triangle M)^3}{3} = \frac{\left(S + \frac{S^3}{3}\right) \cos \alpha \left[1 + \left(S + \frac{S^3}{3}\right) \sin \alpha \left(P + \frac{P^3}{3}\right)\right]}{\left(1 - \frac{P^2}{2}\right)} =$$

$$\left(S + \frac{S^3}{3}\right) \cos \alpha \left[1 + \sin \alpha \left(SP + \frac{PS^3}{3} + \frac{SP^3}{3} + \frac{S^3P^3}{3.3}\right)\right] \left(1 - \frac{P^2}{2}\right)^{-1}$$

Da nun $\frac{\sin \alpha \cdot PS^3}{3}$, $\sin \alpha \frac{S \cdot P^3}{3}$ und $\frac{S^3 \cdot P^3}{3.3}$ von höherer Dimension sind, als von der dritten, so können diese Theilsätze vernachlässigt werden, und wir erhalten daher:

$$\triangle M + \frac{(\triangle M)^3}{3} = \left(S + \frac{S^3}{3}\right) \cos \alpha \left[1 + \sin \alpha \cdot S \cdot P\right] \left(1 + \frac{P^2}{2}\right)$$

Führen wir die angedeutete Multiplication aus, so erhalten wir:

$$\triangle M + \frac{(\triangle M)^3}{3} = S \cdot \cos \alpha + \frac{S^3}{3} \cos \alpha + \frac{SP^2}{2} \cos \alpha +$$

$$\frac{S^3P^2}{2.3} \cos \alpha + S^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot P + \frac{S^4}{\quad} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot P +$$

$$\frac{S^3P^3}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{S^4P^3}{2.3} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot P.$$

Alle Theilsätze aufser dem ersten, zweiten, dritten und fünften können wir wegen zu hoher Dimension vernachlässigen. Wir erhalten dadurch:

Digitized by Google

$$\Delta M + \frac{(\Delta M)^2}{3} = S \cdot \cos\alpha + S\cos\alpha\,\frac{P^2}{2} + S^2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot P + \frac{S^3}{3}\cos\alpha,$$

oder

$$\Delta M = S\cdot\cos\alpha + \frac{S\cdot\cos\alpha\cdot P^2}{2} + S^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot P + \frac{S^3\cdot\cos\alpha}{3} - \frac{(\Delta M)^3}{3} \quad \text{(II.)}$$

§. 24.

Man setze nun in der oben gefundenen Gleichung

$$\Delta P = S\cdot\sin\alpha - \left(\frac{S^2-\Delta p^2}{2}\right)\left(P + \frac{\Delta p}{3}\right)$$

den Werth: $S^2 - \Delta p^2 = S^2 - S^2\sin^2\alpha = S^2(1-\sin^2\alpha) = S^2\cos^2\alpha = (\Delta m)^2$; $S^2 - (\Delta m)^2 = (\Delta p)^2$, so erhält man:

$$\text{(III.)}\quad \Delta P = S\cdot\sin\alpha - \left(P + \frac{\Delta p}{3}\right)\frac{(\Delta m)^2}{2}.$$

Wenn wir in der Gleichung (II.) statt $S\cos\alpha$ und $S\cdot\sin\alpha$ im zweiten, dritten und vierten Theilsatz ihre Werthe setzen, so kömmt:

$$\Delta M = S\cdot\cos\alpha + \frac{\Delta m\,P^2}{2} + \Delta p\cdot\Delta M\cdot P + \frac{S^2\cdot\Delta m}{3} - \frac{\Delta m^3}{3},$$

$$\Delta M = S\cdot\cos\alpha + \frac{\Delta m P^2 + 2\Delta p\cdot\Delta m\cdot P}{2} + \frac{1}{3}\Delta m\,(S^2-\Delta m^2),$$

$$\Delta M = S\cdot\cos\alpha + \frac{(\Delta m)P^2 + 2\Delta p\cdot\Delta m\cdot P}{2} + \frac{1}{3}\cdot\Delta m\cdot\Delta p^2,$$

$$\Delta M = S\cdot\cos\alpha + \frac{\Delta m\cdot P^2 + 2\,\Delta m\cdot\Delta p\cdot P}{2} + \frac{1}{2}\,\Delta m\,(\Delta p)^2 - \frac{1}{6}\,\Delta m\,(\Delta p)^2,$$

Digitized by Google

$$\Delta M = S \cos \alpha + \frac{(\Delta m)\, P^2 + 2\, \Delta m \,.\, \Delta p \,.\, P + \Delta m\, (\Delta p)^2}{2}$$

$$- \frac{1}{6}\, \Delta m\, (\Delta p)^2,$$

$$\Delta M = S \,.\, \cos \alpha + \frac{\Delta m}{2}\, [P + \Delta p]^2 - \frac{\Delta m\, (\Delta p)^2}{6} \quad \text{(IV.)}$$

Es ist hierbei nicht zu vergessen, dafs auf der rechten Seite der Gleichungen (III.) und (IV.) unter Δm und Δp immer **gradlinige** Entfernungen zu verstehen sind.

§. 25.

In dem Dreieck OCB ist:

$$\sin C : \sin B = \sin BO : \sin OC$$

$$\sin b : \cos \alpha = \cos P : \cos P'$$

$$\frac{\sin b}{\cos \alpha} = \frac{\cos P}{\cos (P + \Delta P)} \text{ *)}$$

Berechnet man b und α ohne Rücksicht auf Sphäricität, so hat man $b = \mathfrak{R} + \alpha$, wozu man noch eine Correction ∂ fügen müfste, um die Sphäricität in Rechnung zu ziehen. Dieses ∂ ist die Correction des Azimuths für eine jede folgende Seite S' auf dem Puncte C. Es ist also $b = \mathfrak{R} + \alpha + \partial$ und:

$$\frac{\cos (\alpha + \partial)}{\cos \alpha} = \frac{\cos P}{\cos (P + \Delta p)}$$

E ist aber $\cos (\alpha + \partial) = \cos \alpha \,.\, \cos \partial - \sin \alpha \,.\, \sin \partial = \cos \alpha \,.\, 1 - \sin \alpha \,.\, \text{arc.}\, \partial = \cos \alpha - \partial \,.\, \sin \alpha$, also

$$\frac{\cos \alpha - \partial \,.\, \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos P}{\cos (P + \Delta p)}$$

Hieraus folgt:

---

*) oder näherungsweise: $\frac{\sin b}{\cos \alpha} = \frac{\cos P}{\cos (P + \Delta p)}$

Digitized by Google

$$1 - \delta \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos P}{\cos P \cdot \cos \Delta p - \sin P \cdot \sin \Delta p}$$

Setzen wir in diese Gleichung statt cos Δp seinen Werth $1 - \frac{(\Delta p)^2}{2}$ und statt sin Δp den Bogen Δp, so folgt.

$$1 - \delta \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos P}{\cos P - \frac{\cos P \cdot (\Delta p)^2}{2} - \Delta p \cdot \sin P}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{(\Delta p)^2}{2} - \Delta p \cdot \operatorname{tg} P}; \quad \delta \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1 - \frac{(\Delta p)^2}{2} - \Delta p \cdot \operatorname{tg} P} - 1$$

$$= \frac{1 - 1 + \frac{(\Delta p)^2}{2} + \Delta p \operatorname{tg} P}{1 - \frac{(\Delta p)^2}{2} - \Delta p \operatorname{tg} P} = \frac{\frac{(\Delta p)^2}{2} + (\Delta p) \operatorname{tg} P}{1 - \frac{(\Delta p)^2}{2} - \Delta p \cdot \operatorname{tg} P}.$$

Führen wir die Division aus, so folgt:

$$- \delta \operatorname{tg} \alpha = \frac{(\Delta p)^2}{2} + \Delta p \operatorname{tg} P;$$

daher

$$\delta = -\left(\frac{\Delta p \cdot \operatorname{tg} P + \frac{(\Delta p)^2}{2}}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = -\left(\Delta p \operatorname{tg} P \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{(\Delta p)^2 \cdot 1}{2 \operatorname{tg} \alpha}\right)$$

$$= -\left(\Delta p \operatorname{tg} P \cdot \cot \alpha + \frac{(\Delta p)^2 \cot \alpha}{2}\right).$$

Näherungsweise ist aber $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\Delta m}{\Delta p}$, defshalb

$$\delta = -\left(\Delta p \operatorname{tg} P \frac{\Delta m}{\Delta p} + \frac{(\Delta p)^2 \Delta m}{2 \cdot \Delta p}\right)$$

$$\delta = -\left(\operatorname{tg} P \, \Delta m + \frac{\Delta p}{2} \Delta m\right)$$

$$\delta = -\Delta m \left(\operatorname{tg} P + \frac{\Delta p}{2}\right)$$

$$\text{(V.)} \quad \delta = -\Delta m \left(P + \frac{\Delta p}{2}\right)$$

Digitized by Google

Wenn Δm, P, Δp in Bogen, d. h. in Theilen des Halbmessers, ausgedrückt seyn sollen, so müssen diese Gröfsen noch durch den Halbmesser dividirt werden. Da aber Δm dem Meridian, P und Δp dagegen der Perpendikuläre angehört, da also der Gröfse Δm ein anderer Halbmesser entspricht, als den Gröfsen P und Δp, so müssen wir Δm durch den entsprechenden Krümmungshalbmesser des Meridians $= r$, P und Δp aber durch den Krümmungshalbmesser der Perpendiculäre $= r'$ dividiren. Hierdurch wird also die Ellipticität der Erde in Rechnung gezogen, und der Werth von ΔP, in Bogen ausgedrückt, erscheint unter der Gestalt

$$\frac{S \cdot \sin \alpha}{r'} - \frac{(\Delta m)^2}{2 r^2} \left(\frac{P + \frac{\Delta p}{3}}{r'} \right)$$

Ebenso ist der Werth von $\Delta M =$

$$\frac{S \cdot \cos \alpha}{r} \frac{\Delta m}{2 r} \left[\frac{P + \Delta p}{r'} \right]^2 - \frac{\Delta m \, (\Delta p)^2}{r \cdot 6 \cdot r'^2}$$

Will man diese Werthe in Längenmaafs haben, so multipliciren wir den ersteren mit r', den letzteren mit r. Wir erhalten hierdurch

$$\Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{(\Delta m)^2}{2 r^2} \left(P + \frac{\Delta p}{3} \right)$$

$$\text{(VI.)} \quad \Delta P = S \cdot \sin \alpha - \frac{(\Delta m)^2}{2 r^2} P - \frac{(\Delta m)^2}{2 r^2} \frac{\Delta p}{3}$$

$$\Delta M = S \cdot \cos \alpha + \frac{\Delta m}{2 r'^2} (P + \Delta p)^2 - \frac{\Delta m \cdot (\Delta p)^2}{6 r'^2}$$

$$\text{(VII.)} \quad \Delta M = S \cdot \cos \alpha + \frac{\Delta m}{2 r'^2} P^2 + \frac{\Delta m}{2 r'^2} 2 P \cdot \Delta p + \frac{\Delta m}{2 r'^2} \cdot \frac{2}{3} (\Delta p)^2$$

δ mufs in Secunden ausgedrückt werden. Wir müssen daher setzen:

Digitized by Google

$$\delta = -\frac{\Delta m\left(P + \frac{\Delta p}{2}\right)}{rr' \sin 1''}$$

$$\text{(VIII.)}\quad \delta = -\frac{\Delta m \cdot P}{rr' \sin 1''} - \frac{\Delta m}{rr' \sin 1''} \cdot \frac{\Delta p}{2}$$

§. 26.

Es mufs jetzt nur noch angegeben werden, auf welche Weise man am besten diese Krümmungshalbmesser r und r' berechnet.

Es sey pgio Fig. 18. die Hälfte einer Ellipse, ic die Normale des Punctes i, Winkel β die geographische Breite desselben. Die halbe grofse Axe der Ellipse bezeichnen wir durch a, die halbe kleine Axe durch b.

Die Gleichung der Ellipse ist: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Substituiren wir diesen Werth von y in die schon oben §. 15. entwickelte Gleichung: $\operatorname{tg}\beta = \frac{a^2 \cdot y}{b^2 \cdot x}$, so folgt:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{a^2 \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{b^2 \cdot x} = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot x};\ \text{also:}$$

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{b^2 x^2};\ b^2x^2 \cdot \sin^2\beta = a^2(a^2 - x^2)\cos^2\beta;$$

$$b^2 \cdot x^2 \sin^2\beta = a^4 \cdot \cos^2\beta - a^2 x^2 \cos^2 b;\ b^2 \cdot x^2 \cdot \sin^2\beta + a^2 x^2 \cos^2\beta = a^4 \cos^2\beta;\ x^2(b^2 \sin^2\beta + a^2 \cdot \cos^2\beta) = a^4 \cdot \cos\beta^2;$$

daher

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos\beta}{\sqrt{b^2(1 - \cos^2\beta) + a^2 \cdot \cos^2\beta}} = \frac{a^2 \cdot \cos \cdot \beta}{b\sqrt{1 + \frac{(a^2 - b^2)}{b^2}\cos^2\beta}}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \cos\beta}{b\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2\beta}}, \text{ wenn wir } \frac{a^2 - b^2}{b^2} \text{ durch } \varepsilon^2 \text{ ausdrükken.}$$

Statt des letzteren Ausdruckes können wir auch setzen:

Digitized by Google

$$\frac{b\,(1+\varepsilon^2)\cos\beta}{\sqrt{1+\varepsilon^2\,.\cos^2\beta}}\;.\;*)$$

Den Werth von y bestimmen wir auf ganz ähnliche Art. Aus der Gleichung der Ellipse folgt nämlich: $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung $\operatorname{tg}\beta=\frac{a^2y}{b^2x}$, so folgt: $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{a^2\,.\,y}{b^2\,.\,\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}=\frac{a\,.\,y}{b\sqrt{b^2-y^2}}$;

$b^2(b^2-y^2)\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=a^2.y^2$; $b^4.\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}-y^2b^2\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=a^2\,.\,y^2$;

$$\frac{b^4\,.\,\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\left(a^2+b^2\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right)y^2;$$

$$b^4\sin^2\beta=\left(a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta\right)y^2;$$

$$y=\frac{b^2\sin\beta}{\sqrt{a^2.\cos^2\beta+b^2.\sin^2\beta}}=\frac{b^2\,.\,\sin\beta}{\sqrt{a^2.\cos^2\beta+b^2-b^2\cos^2\beta}}$$

$$=\frac{b^2\,.\,\sin\beta}{\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}}=\frac{b\,.\,\sin\beta}{\sqrt{1+\varepsilon^2\,.\cos^2\beta}}\;**).$$

---

*) Aus der Gleichung $x^2\,(b^2\sin^2\beta+a^2\,.\,\cos^2\beta)=a^4\,.\,\cos^2\beta$ folgt ferner: $x=\frac{a^2\,.\,\cos\beta}{\sqrt{b^2\sin^2\beta+a^2\cos^2\beta}}=\frac{a^2\,.\,\cos\beta}{\sqrt{b^2\sin^2\beta+a^2(1-\sin\beta^2)}}$

$$=\frac{a\,.\,\cos\beta}{\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\sin^2\beta+1}}=\frac{a^2\,.\,\cos\beta}{\sqrt{a^2-\sin^2\beta\,(a^2-b^2)}}$$

$=\frac{a\,.\,\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta\frac{a^2-b^2}{a^2}}}=\frac{a\,.\,\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}$, wenn wir die Größe $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ durch e^2 bezeichnen.

**) Aus der Gleichung $y=\frac{b^2\,.\,\sin\beta}{\sqrt{a^2\,.\,\cos^2\beta+b^2\,.\,\sin^2\beta}}$ folgt ferner

Digitized by Google

Aus der Fig. 18. ergibt sich nun ferner

$$in = \frac{y}{\sin \beta} = \frac{b}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \beta}}.$$

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist bekanntlich:

$$y^2 = 2px - nx^2$$

Hieraus folgt: $dy = \frac{(p - nx)\, dx}{y}$

$$dy^2 = \frac{(p - nx)^2 dx^2}{y^2} = \frac{(p^2 - 2pnx + n^2x^2)\, dx^2}{y^2} =$$

$$= \frac{(p^2 - ny^2)\, dx^2}{y^2};$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 - ny^2)\, dx^2}{y^2} + dx^2 = \frac{[p^2 + (1-n)y^2]\, dx^2}{y^2}$$

$$d^2y = -\frac{dy^2 + n dx^2}{y} = -\frac{n dx^2 + \left(\frac{p^2 - ny^2}{y^2}\right) dx^2}{y}$$

$$d^2y = -\frac{(ny^2 + p^2 - ny^2)\, dx^2}{y^3} = -\frac{p^2 dx^2}{y^3}.$$

Substituiren wir diese Werthe in den bekannten Ausdruck für den Krümmungshalbmesser:

$$\rho = -\frac{\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}\right)^{3/2} \cdot dx^2}{d^2y}$$

so folgt:

$$y = \frac{a^2 \sin\beta - a^2 \sin\beta + b^2 \cdot \sin\beta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin^2\beta}} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta - (a^2 - b^2) \sin\beta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2\beta}}$$

$$= \frac{[a^2 - (a^2 - b^2)] \sin\beta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2\beta}} = \frac{a(1 - e^2) \sin\beta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\beta}}.$$

Digitized by Google

$$\varrho = \frac{-\left(\frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]\,dx^2}{y^2\,dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot dx^2}{-\frac{p^2\,dx^2}{y^3}}$$

$$\varrho = \frac{-\frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]^{\frac{3}{2}} \cdot dx^2}{y^3}}{-\frac{p^2\,dx^2}{y^3}}$$

$$\varrho = +\frac{[p^2 + (1-n)\,y^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

$$\sqrt{p^2 + (1-n)\,(2px - nx^2)} = \sqrt{p^2 + (1-n)\,y^2}$$

ist aber = der Normale der Kegelschnitte. Also $\varrho = \frac{(\text{norm})^3}{p^2}$.

Der Paremeter der Ellipse ist $\frac{b^2}{a}$, daher $\varrho = \frac{(\text{norm})^3}{\frac{b^4}{a^2}} =$

$$\frac{a^2\,(\text{in})^3}{b^4} = \frac{a^2\,b^3}{b^4\,(1 + \varepsilon^2 \cos^2\beta)^{3/2}} = \frac{b^2\,(1+\varepsilon^2)\,b^3}{b^4(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}} =$$

$$\frac{(1+\varepsilon^2)\,b}{(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}};$$ oder näherungsweise:

$$\varrho = \frac{(1+e^2)\,b}{1 + \frac{8}{2}\,e^2\cos^2\beta};$$

oder nach ausgeführter Division:

$$\varrho = (1 + e^2 - \frac{3}{2}\,e^2\cos^2\beta \ldots)\,b = r.$$

Näherungsweise kann man $r' = ic$ setzen: Es ist aber $ic : \cos\beta = x = qm$, wie sich aus dem Anblick der Figur ergibt. Daher $ic = \frac{x}{\cos\beta}$. Setzen wir in diesen Ausdruck statt x seinen oben gefundenen Werth, so erhalten wir

Digitized by Google

$$\frac{b\,(1+\varepsilon^2)\cos\beta}{\cos\beta\,(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{1/2}} = b\,(1+\varepsilon^2)\,(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-1/2}$$

$= b\,(1+\varepsilon^2)\,(1-\frac{1}{2}\,\varepsilon^2\cos^2\beta)$; oder näherungsweise:

$$b\,(1-\frac{1}{2}\,e^2\cos^2\beta + e^2 - \frac{1}{2}\,e^4\cos^2\beta)$$

Den Theilsatz mit e^4 können wir vernachlässigen, daher:

$$r' = b\,(1+e^2-\frac{1}{2}\,e^2\cos^2\beta)$$

$$rr' = (1+e^2-\frac{3}{2}\,e^2\cos^2\beta)\,(1+e^2-\frac{1}{2}\,e^2\cos^2\beta)\,b^2$$

$$= (1+2\,e^2-2\,e^2\cos^2\beta)\,b^2$$

$$rr' = b^2\,(1+2\,e^2\sin^2\beta)$$

Eigentlich müfste man mittels dieser Formeln r und r′ für jeden Dreieckspunct berechnen. Wenn jedoch das zu vermessende Land nicht sehr grofs ist, so reicht es hin, diese Gröfsen blofs für den Mittelpunct*) dieses Landes zu berechnen und sich ihrer bei der Berechnung der Coordinaten aller Puncte zu bedienen.

§. 27.

Um mittels der Formeln (VI.) (VII.) und (VIII.) im §. 25. die sphäroidischen Coordinaten zu berechnen, bedient man sich sehr zweckmäfsig des nachstehenden Formulars, in welchem beispielsweise die Berechnung der Coordinaten des Punctes Taufstein ausgeführt worden ist. In diesem Formulare bedeutet

s die Entfernung des neuen Punctes (Taufstein) von dem

*) Die geographische Breite des Mittelpunctes vom Grofsherzogthum Hessen ist ungefähr 55°, 5′ neue Theilung.

Digitized by Google

vorhergehenden Puncte (Feldberg), in unserem Falle also die Dreiecksseite F T (Fig. 19.);

α das Azimuth des neuen Punctes (Taufstein) an dem vorhergehenden Puncte (Feldberg), (also den Winkel m F T = 66°, 82′, 00″,7);

α' das Azimuth des folgenden Punctes (Knill) an dem neuen Puncte (Taufstein), (also den Winkel M T K = 17°,51′,04″,5).

γ den Winkel des vorhergehenden und folgenden Punctes an dem neuen Puncte, (also den Winkel F T K);

P die Ordinate des vorhergehenden Punctes (Feldberg);

P′ die Ordinate des neuen Punctes (Taufstein);

M die Abscisse des vorhergehenden Punctes;

M′ die Abscisse des neuen Punctes.*)

---

*) $a' = 2\,r^2$, $b' = 6\,r^2$, $a'' = 12\,r'^2$, $c = r'^2$, $d = 8\,r'^2$, $e' = r\,r'\sin 1''$, $f = 2\,r\,r'\sin 1''$.

Digitized by Google

Vorhergehender Punct: *Feldberg.*	Neuer Punct: *Taufstein.*	Folgender Punct: *Knill.*

Ordinate.

log s.	4,4080390	
log sin α	9,9381332	
log l.	4,3461722	l = +22190,76
Comp. log a'	6,88640	+
log P	3,75393	−
2 log IV	8,21038	+
log II	0,85071−2	II = +0,07
Comp. log b'	6,40928	+
log I	4,34617	+
2 log IV	8,21038	+
log III	0,96583−2	III = −0,09

	+	−
P	.....	5674,48
I	22190,76	.....
II	0,07	.....
III	.....	0,09
Summe =	22190,83	5674,57
P'	16516,26	Klaftern.

Abscisse.

log s	4,4080390	
log cos α	9,6971524	
log IV	4,1051914	IV = +12740,64
Cp. log a''	6,88400	+
log IV	4,10519	+
2 log P	7,50786	+
log V	0,49705−2	V = +0,03
Cp. log c	7,18503	+
log P	3,75393	−
log I	4,34617	+
log IV	4,10519	+
log VI	0,39032−1	VI = −0,25
Cp. log d	6,70790	+
2 log I	8,69234	+
log IV	4,10519	+
log VII	0,50543−1	VII = +0,32

	+	−
M	16053,95	.....
IV	12740,64	.....
V	0,03	.....
VI	.....	0,25
VII	0,32	.....
Summe	28794,94	0,25
M'	28794,69	Klaftern.

Azimuth.

Cp. log e'	2,99011	+
log P	3,75393	−
log IV	4,10519	+
log VIII	0,84923	VIII = +7,1
Cp. log f	2,68908	+
log I	4,34617	+
log IV	4,10519	+
log IX	1,14044	IX = −13,8

	+	−
α	66° 82' 00",7	.....
γ	150 69 10,5	.....
2 R	.....	200° 00' 00",0
VIII	7",1	.....
IX	.....	13",8
	217° 51' 18,3	200°,00',13",8
α'	17 51 04,5	

Digitized by Google

Der Werth von II. ist ursprünglich negativ. Allein weil die Ordinate des Feldbergs im vierten Quadranten liegt, so ist in unserem Falle der Werth von $II = -\left[\frac{\Delta m^2}{2r^2}(-P)\right] = +\left[\frac{\Delta m^2}{2r^2}P\right]$. Dasselbe ist bei der Berechnung von log VIII zu erinnern.

§. 28.

Die Complemente der Constanten a', a'', b', c, d, e' und f hat man auf folgende Art berechnet, wobei wir die mittlere geogr. Br. des Grofsherzogthums Hessen $= 55°, 5'$ (neue Theilung) setzen.

I) Berechnung von complem. log a'.

$a' = 2r^2$; $r = (1 + e^2 - \frac{3}{2}e^2\cos^2\beta)\,b$; $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$;

a = 3271819 Toisen, b = 3261014 Toisen; log (Grofsh. Hess. Klftr.) = log (Tois.) + 0,8918799 — 1

log a =	6,5147892
Verwandlungs-Log. =	0,8918799 — 1
log a in Klaftern =	6,4066691
	2
log a^2 =	12,8133382
a^2 =	6506360000000
log b =	6,5133526
Verwandlungs-Log. =	0,8918799 — 1
log b in Klaftern =	6,4052325
	2
log b^2 =	12,8104650

Digitized by Google

$$b^2 = 6468460000000$$
$$a^2 = 6506360000000$$
$$b^2 = 6463460000000$$

$$a^2 - b^2 = \,,\,,\, 42900000000$$
$$\log (a^2 - b^2) = 20{,}6324573 - 10$$
$$\log a^2 = 12{,}8133382$$

$$\log e^2 = 7{,}8191191 - 10$$
$$e^2 = 0{,}0065936$$
$$1 + e^2 = 1{,}0065936$$

$$\log \cos \beta = \log \cos (55°{,}5') = 9{,}8121447 - 10$$
$$2$$

$$19{,}6242894 - 20$$
$$\log \cos {}^2\beta = 0{,}6242894 - 1$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log e^2 = 0{,}8191191 - 3$$

$$\log (e^2 \,.\, 3 \,.\, \cos {}^2\beta) = 0{,}9205298 - 3$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log \frac{3}{2}\, e^2 \cos {}^2\beta = 0{,}6194998 - 3$$

$$\frac{3}{2}\, e^2 \cos {}^2\beta = 0{,}0041639$$

$$1 + e^2 = 1{,}0065936$$
$$\frac{3}{2}\, e^2 \cos {}^2\beta = 0{,}0041639$$

$$(1 + e^2 - \frac{3}{2}\, e^2 \cos {}^2\beta) = 1{,}0024297$$

Digitized by Google

$$\log\left(1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \cos {}^2\beta\right) = 0{,}0010539$$

$$\log b = 6{,}4052825$$

$$\log r = 6{,}4062864.$$

$$\log r = 6{,}4062864$$

$$2$$

$$\log r^2 = 12{,}8125728$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log a = \log 2\, r^2 = 13{,}1136028$$

$$\text{compl. } \log a = 6{,}8863972 - 20$$

II) Berechnung von compl. log. b′.

$$b' = 6\, r^2$$

$$\log r^2 = 12{,}8125728$$

$$\log 6 = 0{,}7781513$$

$$\log b' = 13{,}5907241$$

$$\text{comp. } \log b' = 6{,}4092759 - 20.$$

III) Berechnung von compl. log c.

$$c = r'^2;\ r' = b\left(1 + e^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos {}^2\beta\right)$$

$$\log \cos {}^2\beta = 0{,}6242894 - 1$$

$$\log e^2 = 0{,}8191191 - 3$$

$$\log\left(e^2 \cos {}^2\beta\right) = 0{,}4434085 - 3$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\left(\frac{1}{2} e^2 \cos {}^2\beta\right) = 0{,}1423785 - 3$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\ e^2 \cos {}^2\beta = 0{,}0013880$$

$$1 + e^2 = 1{,}0065936$$

$$\frac{1}{2}\ e^2 \cos {}^2\beta = 0{,}0013880$$

$$\left(1 + e^2 - \frac{1}{2}\ e^2 \cos {}^2\beta\right) = 1{,}0052056$$

$$\log \left(1 + e^2 - \frac{1}{2}\ e^2 \cos {}^2\beta\right) = 0{,}0022549$$

$$\log b = 6{,}4052325$$

$$\log r' = 6{,}4074874$$

$$2$$

$$\log c = \log r'^2 = 12{,}8149748$$

$$\text{compl. log } c = 7{,}1850252 - 20$$

IV) Berechnung von compl. log. d

$$d = 3\ r'^2$$

$$\log r'^2 = 12{,}8149748$$

$$\log 3 = 0{,}4771213$$

$$\log d = 13{,}2920961$$

$$\text{compl. log } d = 6{,}7079039 - 20.$$

V) Berechnung von compl. log. e',

$$e' = rr' \cdot \sin 1''$$

$$\log r = 6{,}4062864$$

$$\log r' = 6{,}4074874$$

$$\log rr' = 12{,}8137738$$

$$\log \sin 1'' = 4{,}1961199 - 10$$

$$\log e' = 17{,}0098937 - 10$$

$$\log e' = 7{,}0098937$$

$$\text{compl. log } e' = 2{,}9901063 - 10$$

Digitized by Google

VI) Berechnung von compl. log. f,

$$f = 2\,rr'\sin 1''$$

$$\log(rr'\sin 1'') = 7{,}0098937$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log f = 7{,}3109237$$
$$\text{compl. log } f = 2{,}6890763 - 10.$$

VII) Berechnung von compl. log. a'',

$$a'' = 2\,r'^2$$

$$\log r'^2 = 12{,}8149748$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log a'' = 13{,}1160048$$
$$\text{compl. log } a'' = 6{,}8839952 - 20.$$

Zweites Capitel.

Von den Coordinaten der Dreieckspuncte zweiten, dritten und vierten Rangs.

§. 29.

Hat man auf diese Art die Coordinaten sämmtlicher Dreieckspuncte des ersten Rangs gefunden, so geschieht die Berechnung der Coordinaten der Dreieckspuncte zweiten Rangs dadurch, dafs man zuvörderst die Differenzen der Coordinaten der Dreieckspuncte ersten Rangs und der Coordinaten von den umliegenden Dreieckspuncten zweiten Rangs bestimmt. Um sodann die eigentlichen Coordinaten der Dreieckspuncte zweiten Rangs zu erhalten, braucht man nur diese Coordinatendifferenzen mit Beachtung ihrer Zeichen zu den Coordinaten derjenigen Dreieckspuncte ersten Rangs

Digitized by Google

hinzu zu addiren, von denen man bei der Berechnung der Coordinatendifferenzen ausgegangen ist. Da nun diese Coordinatendifferenzen wegen ihrer Kleinheit im Vergleich zu dem Halbmesser der Erde als gradlinig angesehen werden können, so wird hierdurch die Bestimmung der Coordinaten des zweiten Rangs viel einfacher als die Bestimmung der Coordinaten des ersten Rangs. Bei der Berechnung der Coordinaten des dritten Rangs geht man von den Coordinaten des zweiten Rangs aus, und bei den Coordinaten des vierten Rangs von den Coordinaten des dritten. Uebrigens ist das Verfahren bei der Berechnung der Coordinaten des zweiten, dritten und vierten Rangs ganz eins und dasselbe.

§. 30.

Um die erwähnten Coordinatendifferenzen zu finden, ist es zuerst erforderlich, die Azimuthe der Dreiecksseiten zu bestimmen.

Es stelle Fig. 20. einen Theil eines Dreiecksnetzes vom zweiten Rang vor, dessen sämmtliche Winkel und Seiten bereits bekannt sind. Die Seite AG sey zugleich eine Seite des ersten Ranges; das Azimuth derselben, oder der Winkel, welchen sie mit dem Meridian NS bildet, ist uns also ebenfalls gegeben. Den Winkel ABC findet man durch die Addition der Winkel ABG, GBH und HBC; ebenso findet man den Winkel BCD durch die Addition der Winkel BCH und HCD, den Winkel CDE durch die Addition der Winkel HDC und HDE u. s. f.; auf gleiche Weise alle übrigen Winkel des Polygons ABCDEFG.

Wenn ns den Meridian von B, n′s′ den Meridian von C, n″s″ den Meridian von D u. s. f. bezeichnet, so sind die concaven Winkel BAN, CBn, DCn′ und die convexen

Digitized by Google

Winkel $n''DE$, $n'''EF$, $n^{IV}FG$, $n^{V}GA$ die Azimuthe der Puncte B, C, D, E, F, G, A, indem wir, um negative Winkel zu vermeiden, die Azimuthe von Norden aus in der Richtung Ost — Süd — West — Nord bis zu 400 Grad fortzählen.

Die Werthe dieser Azimuthe finden wir aus dem gegebenen Azimuthe GAN und den Winkeln ABC, BCD, CDE, EFG, FGA, die wir der Kürze halber durch p'', p''', p^{IV} etc. bezeichnen wollen, sehr leicht durch folgende Betrachtung.

Das Azimuth der Seite AB ist $=$ GAN $+$ BAC $= \alpha'$.

Das Azimuth der Seite BC ist $=$ dem convexen Winkel $sBC - (ABs + ABn)$. Es ist aber der convexe Winkel $sBC =$ dem concaven Winkel $ABs +$ conv. W. $ABC = \alpha' +$ conv. W. $ABC = \alpha' + p''$, daher das Azimuth der Seite $BC = \alpha' + p'' - (ABs + ABn)$ $= \alpha' + p'' - 2\,\mathfrak{R} = \alpha''$.

Auf gleiche Weise finden wir das Azimuth der Seite $CD = \alpha'' + p''' - 2\,\mathfrak{R} = \alpha'''$; und durch Substitution des Werthes von α'' folgt:

$$\alpha''' = \alpha' + p'' + p'' - 4\,\mathfrak{R}.$$

Das Azimuth der Seite ED ist $= \alpha^{IV} = \alpha''' + p^{IV} - 2\,\mathfrak{R}$ $= \alpha' + p'' + p''' + p^{IV} - 6\,\mathfrak{R}$.

Das Azimuth der Seite $EF = \alpha^{V} = \alpha' + p'' + p'''$ $+ p^{IV} + p^{V} - 8\,\mathfrak{R}$ u. s. f.

Im Allgemeinen hat man:

$$\alpha^{n} = \alpha' + p'' + p''' + \ldots . p^{n} - (n - 1)\,2\,\mathfrak{R}.$$

Die Azimuthe der Seiten HB, HC, HD u. s. f. sind nunmehr ebenfalls sehr leicht zu finden. Es ist z. B. der Azimuth von $HB = nBC - HBC = \alpha'' - HBC$.

Digitized by Google

§. 31.

Um also die Azimuthe der Seiten eines Dreiecksnetzes vom zweiten Rang zu berechnen, stellt man die einzelnen Dreiecke in eine beliebige Anzahl von Polygonen zusammen, und zwar so, dafs in jedem Polygon wenigstens eine Dreiecksseite des ersten Rangs vorkommt.

Wir haben bei dieser Zusammenstellung zu bedenken, dafs wir nicht für alle Seiten die Azimuthe zu bestimmen brauchen, sondern nur für so viele, als wir zur Berechnung der Coordinaten derjenigen Dreieckspuncte zweiten Rangs, welche nicht zugleich Dreieckspuncte des ersten Rangs sind, nöthig haben.

Wäre uns z. B. das Dreiecksnetz (Fig. 21.) gegeben, in welchem die fünf Dreiecksseiten des ersten Rangs rl, ld, rd, rc und cd vorkommen, und in welchem sämmtliche Winkel bekannt sind, so würde man die sämmtlichen Dreiecke in folgende acht Polygone zusammenstellen:

1) rpnml	5) crqs
2) rol	6) chr
3) ril	7) cgd
4) ldek	8) cdfz

In jedem einzelnen Polygon werden die Azimuthe nach der obigen Formel $\alpha^n = \alpha' + p'' + p''' + \ldots p^n - (n-1)\,2\,\Re$ berechnet.

Um auch die Azimuthe der Seiten ac und cb zu bekommen, so addiren wir zu dem Azimuth der Seite cf zuerst den Winkel m und erhalten so das Azimuth von cb. Das Azimuth von ac erhalten wir durch Addition des Winkels n zu dem Azimuth von cb. *)

*) Dieses letztere Verfahren für die Auffindung der Azimuthe ist übrigens nicht so gut, als das gewöhnliche mittels Zusammenstellung der Dreiecke zu Polygonen, weil wir bei ihm weder die gemessenen Winkel noch auch die Coordinatendifferenzen corrigiren können.

Digitized by Google

§. 32.

Da die Anzahl der Grade der innern Winkel eines n Eckes $= (n - 2)\ 2\ \Re$ seyn mufs, so wird, wenn nach der Zusammenstellung der Dreiecke zu Polygonen dieses nicht statt findet, zum Behufe der Correction der Winkel, $\frac{1}{n}$ der Fehlersumme von jedem einzelnen Winkel subtrahirt, oder beziehungsweise zu demselben addirt. Es fragt sich nun, wie man zu verfahren hat, wenn bei diesem $\frac{1}{n}$ der Fehlersumme Bruchtheile von Secunden vorkommen. Zur Beantwortung dieser Frage diene folgendes Beispiel.

Das Polygon sey ein Neuneck und die Summe der gemessenen Winkel $= 1397°,68',11''$

$(n - 2)\ 2\ \Re = 1400°,00',00''$

$- 1397°,68',11''$

Fehlersumme $= 2°,31'89''$

$\frac{1}{9}$ der Fehlersumme ist also $= 25'76''\ \frac{5}{9}$. Auf jeden Winkel kommen also $25',76''$.

Aufserdem sind aber noch 5 Secunden übrig geblieben, welche eigentlich ebenfalls gleichmäfsig auf jeden einzelnen Winkel vertheilt werden müfsten. Wenn wir also ganz genau verfahren wollten, so müfste jeder Winkel einen Zusatz von $25',76''\ \frac{5}{9}$ erhalten. Um jedoch Bruchtheile von Secunden zu vermeiden, so nimmt man irgend fünf Winkel des Polygons und gibt jedem einen Zusatz von $25',77''$, den übrigen vier Winkeln aber nur $25',76''$. Auf diese Art bewirken wir wenigstens, dafs die Summe der Polygonwinkel $= (n - 2)\ 2\ \Re$ wird.

Bei der Azimuthberechnung ist ferner zu bemerken,

Digitized by Google

dafs, wenn die Subtraction der Vielfachen von zwei Rechten nicht vorgenommen werden kann, man 400° zu dem Minuendus zu addiren hat. Wenn dagegen der Rest gröfser als 4 ℜ ist, so läfst man diese 4 ℜ ganz aufser Acht.

§. 33.

Beispiel.

Es sey uns in Figur 22. ein Dreiecksnetz vom zweiten Rang gegeben, in welchem zugleich die beiden Dreiecke des ersten Rangs Altenburg — Marienzell — Wilhelminenhof und Hubertuskapelle — Wilhelminenhof — Marienzell vorkommen, deren Winkel, Seiten, Azimuthe und Coordinaten als bekannt angesehen werden können. Es sey

die Ord.v.Wilhelminenhof = 14323,20 Kl., die Absc. = 22054,10
» » Altenburg = 14265,00 Kl., » » = 22429,40
» » St. Hubertuskap. = 14234,50 Kl., » » = 21658,30
» » Marienzell = 13722,77 Kl., » » = 22042,68

der Wink.: Wilhelm. — Marienz. — Hubert. sey = 42°,24′,22″
» » Marienz. — Hubert. — Wilhelm. » = 73,17,35
» » Hubert. — Wilh. — Mar. » = 84,61,00
» » Altenburg — Mar. — Wilh. » = 38,17,19
» » Mar. — Altenb. — Wilh. » = 70,40,75
» » Mar. — Wilh. — Altenb. » = 91,40,81

die Seite Marienzell — Hubertuskapelle = 640,5 Kl.;
» » Hubertusk. — Wilhelminenhof = 406,2 »
» » Marienzell — Wilhelminenhof = 602,0 »
» » Marienzell — Altenburg = 667,3 »
» » Wilhelm. — Altenburg = 380,1 »
» » Altenburg — Johannisberg = 385,0 »
» » Johannisb. — Hauthalen = 394,7 »
» » Hauthalen — Marienzell = 177,8 »
» » Marienzell — Harlingen = 437,8 »

Digitized by Google

die Seite Harlingen — Hubertusk. = 230,7 Kl.
» » Hubertusk. — Mathildenburg = 239,8 »
» » Mathildenb. — Marienzell = 534,8 »
» » Marienzell — Mainau = 394,8 »
» » Marienzell — Rethy = 556,5 »
das Azimuth der Seite Marienzell — Altenburg = 60°,50′,00″
» » » » Hubertusk. — Marienzell = 341°,02′,00″

Zur Berechnung der nöthigen Azimuthe mögen in dem vorliegenden Dreiecksnetze die Figuren A (Altenburg — Johannisberg — Hauthalen — Marienzell); B (Marienzell — Harlingen — Hubertuskapelle) und C (Hubertuskapelle — Mathildenburg — Marienzell) dienen. Diese Berechnung wird auf folgende Weise bewerkstelligt.

Digitized by Google

Polygon.	Namen der Stationen.	Gemessene Winkel.	Summen der Winkel.	Vielfache von zwei Rechten.	Neigung gegen den Meridian (α)	Anliegende Seiten (s)
		Grad. Min. Sec.	Grad. Min. Sec.	Grad.	Grad. Min. Sec.	Klaftern. Zolle.
Polygon A.	Azimuth von Marienzell — Altenburg		60 . 50 . 00			
	Altenburg	14 . 73 . 37	75 . 23 . 33	200	275 . 23 . 33	385 . 0
	Johannisberg	195 . 02 . 36	270 . 25 . 65	400	270 . 25 . 65	394 . 7
	Hauthalen	53 . 09 . 94	323 . 35 . 55	600	123 . 35 . 55	177 . 8
	Marienzell	137 . 14 . 49	460 . 50 . 00	800	60 . 50 . 00	667 . 3
		400 . 00 . 16				
Polygon B.	Azimuth von Hubertusk. — Marienzell		341 . 02 . 00			
	Marienzell	14 . 31 . 66	355 . 33 . 22	200	155 . 33 . 22	437 . 8
	Harlingen	158 . 40 . 07	513 . 72 . 85	400	113 . 73 . 85	230 . 7
	Hubertuskapelle	27 . 29 . 58	541 . 02 . 00	600	341 . 02 . 00	640 . 5
		200 . 01 . 31				
Polygon C.	Azimuth von Marienzell — Hubertusk.		141 . 02 . 00			
	Hubertuskapelle	59 . 83 . 66	200 . 84 . 80	200	00 . 84 . 80	239 . 8
	Mathildenburg	116 . 59 . 87	317 . 43 . 82	400	317 . 43 . 82	534 . 8
	Marienzell	23 . 59 . 03	341 . 04 . 00	600	141 . 02 . 00	640 . 5
		200 . 02 . 56				
	Azimuth von Marienzell — Hauthalen				323 . 35 . 55	
	Mainau				263 . 75 . 11	894 . 8
	Rethy				219 . 19 . 11	556 . 5

Digitized by Google

In A ist der Ueberschuſs der gemessenen Winkel über $(n-2)\,2\,R$, d. h. über $400^g = 16''$. Wenn wir wegen dieses Ueberschusses die erforderliche Correction an den Winkeln bei Altenburg, Johannisberg, Hauthalen und Marienzell anbringen, so erhalten wir

14°,73′,33″,	statt	14°,73′,37″
195°,02′,32″	—	195°,02′,36″
53°,09′,90″	—	53°,09′,94″
137°,14′,45″	—	137°,14′,49″

Der Ueberschuſs in B beträgt 1′,31″ und die corrigirten Winkel sind daher:

14°,31′,22″
158°,39′,63″
27°,29′15″

In C beträgt endlich der Ueberschuſs 2′,56″ und die corrigirten Winkel sind:

59°,82′,80″
116°,59′,02″
23°,58′,18″

Die Zahl 75°,23′,33″ in der vierten Columne ist durch Addition des Azimuthes 60°,50′,00″ und des corrigirten Polygonwinkels 14°,73′,33″ entstanden. Ebenso die Zahl 270°,25′,65″ aus der Addition von 75°,23′,33″ und 195°,02′,32″, u. s. f.

§. 34.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der Coordinaten über.

Es sey uns das Polygon ABCD′E (Fig. 23.) gegeben. DN sey der Meridian des Hauptortes (Darmstadt); Aa, aD seyen die Coordinaten des Punctes A; Bb, bD die Coordinaten des Punctes B u. s. f., A sey ein Dreieckspunct des ersten Rangs; der concave Winkel $\beta AB = \alpha'$ sey das Azimuth der Seite AB, der concave Winkel $CBE = \alpha''$ das

Digitized by Google

Azimuth der Seite BC, der convexe Winkel $\gamma CD' = \alpha'''$ das Azimuth der Seite CD', der convexe Winkel $nD'E = \alpha^{IV}$ das Azimuth der Seite D'E und endlich der concave Winkel $rEA = \alpha^{V}$ das Azimuth der Seite EA.

Sind uns nun die Werthe aller dieser Azimuthe bekannt, und aufserdem die Coordinaten des Punctes A, so finden wir die Coordinaten der Puncte B, C, D' und E auf sehr einfache Weise.

Es ist nämlich die Ordinate von $B = Bb = Aa + \beta B$. Es ist aber $\beta B = (AB) \sin \alpha'$, also die Ordinate von $B = Aa + S' \sin \alpha'$, indem wir AB der Kürze halber durch S' bezeichnen. Ebenso wollen wir auch die Seite BC durch S'', die Seite D'C durch S''', die Seite D'E durch S^{IV} und die Seite EA durch S^{V} bezeichnen.

Die Abscise von $B = Db = Da + ab = Da + A\beta$ $= Da + S' \cos \alpha'$.

Die Ordinate von C ist $= Cc = bB + C\varepsilon = Aa$ $+ S' \sin \alpha' + S'' \sin \alpha''$.

Die Abscisse von C ist $= cD = Db + B\varepsilon = Da +$ $S' \cdot \cos \alpha' + S'' \cdot \cos \alpha''$.

Die Ordinate des Punctes D' ist $= D'd = Cc - D'\gamma$. Da aber das Azimuth α''' gröfser als $3\,\Re$ ist, so ist $S''' \sin \alpha'''$ negativ und $= - D'\gamma$, also $D'd = Cc + S''' \sin \alpha'''$ $= Aa + S' \sin \alpha' + S'' \sin \alpha'' + S''' \sin \alpha'''$.

Die Abscisse des Punctes D' ist $= Dd = cD + \gamma C =$ $Da + S' \cos \alpha' + S'' \cos \alpha'' + S''' \cos \alpha'''$.

Die Ordinate des Punctes E ist $= Ee = D'd - E\delta$. Da das Azimuth α^{IV} gröfser ist als $2\,\Re$, aber kleiner als $3\,\Re$, so ist: $S^{IV} \sin \alpha^{IV} = - E\delta$, also $Ee = D'd + S^{IV} \sin \alpha^{IV}$ $= Aa + S' \sin \alpha' + S'' \sin \alpha'' + S''' \sin \alpha''' + S^{IV} \sin \alpha^{IV}$.

Die Abscisse des Punctes E ist $= De = Dd - D'\delta$. Es ist aber $S^{IV} \cos \alpha^{IV} = - D'\delta$. Daher $De = Da + S' \cos \alpha'$ $+ S'' \cos \alpha'' + S''' \cos \alpha''' + S^{IV} \cos \alpha^{IV}$.

Digitized by Google

Die Ordinate des Punctes A ist $= Aa = Ee + \alpha A$. Das Azimuth α^V ist gröfser als 1 $\Re$ und kleiner als 2 $\Re$, daher $S^V \sin \alpha^V = \alpha A$, also $Aa = Aa + S' \sin \alpha' + S'' \sin \alpha'' + S''' \sin \alpha''' + S^{IV} \sin \alpha^{IV} + S^V \sin \alpha^V$.

Die Abscisse des Punctes A ist $= Da = De - E\alpha = Da + S' \cos \alpha' + S'' \cos \alpha'' + S''' \cos \alpha''' + S^{IV} \cos \alpha^{IV} + S^V . \cos \alpha^V$.

Aus den beiden Gleichungen:

$$Aa = Aa + S' \sin \alpha' + \ldots\ldots + S^V \sin \alpha^V$$

$$Da = Da + S' \cos \alpha' + \ldots\ldots + S^V \cos \alpha^V .$$

folgt: $0 = S' \sin \alpha' + \ldots + S^V \sin \alpha^V$ (1.)

$0 = S' \cos \alpha' + \ldots + S^V \cos \alpha^V$ (2.)

Die Werthe von $S' \sin \alpha'$, $S'' \sin \alpha''$, $S^V \sin \alpha^V$ sind, wie wir gesehen haben, positiv. Wir wollen sie durch $\Delta p'$, $\Delta p''$, Δp^V bezeichnen.

Die Werthe von $S''' \sin \alpha'''$ und $S^{IV} \sin \alpha^{IV}$ sind negativ. Wir wollen sie durch $-\Delta p'''$ und $-\Delta p^{IV}$ ausdrücken.

Ferner sind die Werthe von $S' \cos \alpha'$, $S'' \cos \alpha''$, $S''' \cos \alpha'''$ positiv. Sie sollen durch $\Delta m'$, $\Delta m''$, $\Delta m'''$ bezeichnet werden.

Die Werthe von $S^{IV} \cos \alpha^{IV}$, $S^V \cos \alpha^V$ dagegen sind negativ. Wir wollen sie durch $-\Delta m^{IV}$ und $-\Delta m^V$ bezeichnen.

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen (1.) und (2.) so folgt:

$$0 = \Delta p' + \Delta p'' - \Delta p''' - \Delta p^{IV} + \Delta p^V$$

und $$0 = \Delta m' + \Delta m'' + \Delta m''' - \Delta m^{IV} - \Delta m^V$$

Es ist also in jedem Polygon die Summe der negativen Ordinatendifferenzen + Summe der positiven Ordinatendifferenzen = o, und ebenso auch die Summe der negativen Abscissendifferenzen + Summe der positiven Abscissendifferenzen = o.

Digitized by Google

§. 85.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, mit den berechneten Coordinatendifferenzen eine Correction vorzunehmen, welche auf folgende Art bewerkstelligt wird. Man summirt 1) die positiven Ordinatendifferenzen, 2) die negativen Ordinatendifferenzen, 3) die positiven Abscissendifferenzen, 4) die negativen Abscissendifferenzen. Die Coordinatendifferenzen der Endpuncte der Dreiecksseite ersten Rangs,*) welche wir ΔY und ΔX nennen wollen, bleiben jedoch von dieser Addition ausgeschlossen. Man sieht nun, ob die Summe der positiven, oder die Summe der negativen Ordinatendifferenzen gröfser ist, und zieht die kleinere von der gröfseren ab. Ist das Erstere der Fall, so ist dieses ein Zeichen, dafs ΔY negativer Natur ist. Ist das Zweite der Fall, so erkennt man hierdurch, dafs ΔY positiv ist. Der absolute Werth des Restes, welcher nach der Subtraction übrig bleibt, und welchen wir D nennen wollen, müfste eigentlich dem absoluten Werthe von ΔY gleich seyn. Dieses ist jedoch gewöhnlich nicht der Fall. Wir nehmen hier zuvörderst an, D sey positiv und gröfser als ΔY, und es sey $D - \Delta Y = +a$, welches in Zollen ausgedrückt ist. Es fragt sich nun, wie wir zu verfahren haben, um D gleich grofs zu machen mit ΔY, unter der Voraussetzung, dafs wir letzteres ungeändert lassen, weil angenommen werden mufs, dafs diese Zahl richtig und blofs in den übrigen Ordinatendifferenzen gefehlt worden sey.

Offenbar müssen wir sämmtliche positive Ordinatendif-

*) Die Zusammenstellung der Dreiecke zweiten Rangs zu Polygonen mufs, wie schon oben bemerkt worden ist, immer so vorgenommen werden, dafs in jedem Polygon wenigstens eine Dreiecksseite ersten Rangs vorkommt.

Digitized by Google

ferenzen um die Zahl $\frac{a}{n}$ verkleinern (wo n die Anzahl der positiven und negativen Δp bedeutet) und sämmtliche negative Ordinatendifferenzen um die Zahl $\frac{a}{n}$ vergrößern, wobei jedoch ΔY umgeändert bleibt. Hierdurch wird $D - \Delta Y = o$.

Ist $D < \Delta Y$, so müssen wir die positiven Ordinatendifferenzen vergrößern, und die negativen verkleinern.

Gerade so ist das Verfahren, wenn die Summe der negativen Ordinaten größer ist, als die Summe der positiven und gerade so das Verfahren bei der Correction der Abscissendifferenzen.

§. 36.

Die Berechnung der Coordinatendifferenzen, die Correction derselben und die Berechnung der Coordinaten selbst gestaltet sich auf folgende Art.

Digitized by Google

Berechnung der Coordinaten.

275°,23′,33″ (Altenburg—Johannisberg) 385,0 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,96626	log cos α	9,57903
log S	2,58543	log S	2,58543
log Δp	2,55169	log Δm	2,16446
Δp	— 356,20	Δm	— 146,00
Vorherg. p	+ 14265,00	Vorherg. m	+ 22429,40
p′	+ 13908,89	m′	+ 22283,66

270°,25′65″ (Johannisberg — Hauthalen) 394,7 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,95078	log cos α	9,65355
log S	2,59620	log S	2,59620
log Δp	2,54698	log Δm	2,24975
Δp	— 352,30	Δm	— 177,70
Vorherg. p.	+ 13908,89	Vorherg. m	+ 22283,66
p′	+ 13556,68	m′	+ 22106,22

123°,35′55″ (Hauthalen — Marienzell) 177,8 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,97008	log cos α	9,55480
log S	2,25008	log S	2,25008
log Δp	2,22016	log Δm	1,80488
Δp	+ 166,00	Δm	— 63,80
Vorherg. p	+ 13556,68	Vorherg. m	+ 22106,22
p′	+ 13722,77	m′	+ 22042,68

Ordinate.	Abscisse.

Digitized by Google

155°32′,22″ (Marienzell — Harlingen) 437,8 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,80998	log cos α	9,88296
log S	2,64122	log S	2,64122
log Δp	2,45120	log Δm	2,52418
Δp	+ 282,60	Δm	— 334,30
Vorherg. p	+ 13722,77	Vorherg. m	+ 22042,68
p′	+ 14007,24	m′	+ 21708,04

113°73′85″ (Harlingen - Hubertusk.) 230,7 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,98981	log cos α	9,83073
log S	2,36309	log S	2,36309
log Δp	2,35290	log Δm	1,69382
Δp	+ 225,40	Δm	— 49,41
Vorherg. p	+ 14007,24	Vorherg. m	+ 21708,04
p′	+ 14234,50	m′	+ 21658,30

00°,84′80″ (Hubertusk. — Mathildenb.) 239,8 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	8,12450	log cos α	9,99996
log S	2,37988	log S	2,37988
log Δp	0,50438	log Δm	2,37984
Δp	+ 3,19	Δm	+ 239,80
Vorherg. p	+ 14234,50	Vorherg. m	+ 21658,30
p′	+ 14237,63	m′	+ 21898,04

317°43′84″ (Mathildenb. — Marienzell) 534,8 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,98349	log cos α	9,48222
log S	2,72817	log S	2,72817
log Δp	2,71166	log Δm	2,16039
Δp	— 514,80	Δm	+ 144,70
Vorherg. p	+ 14237,63	Vorherg. m	+ 21898,04
p′	+ 13722,97		+ 22042,64

263°75′11″ (Marienzell — Mainau) 394,8 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,92542	log cos α	9,73170
log S	2,59637	log S	2,59637
log Δp	2,52179	log Δm	2,32807
Δp	— 332,50	Δm	— 212,90
Vorherg. p	+ 13722,80	Vorherg. m	+ 22042,70
p′	+ 13390,30	m′	+ 21829,80

219°19′11″ (Marienzell — Rethy) 556,5 Kl.

Ordinate.		Abscisse.	
log sin α	9,47260	log cos α	9,97996
log S	2,74542	log S	2,74542
log Δp	2,21802	log Δm	2,72538
Δp	— 165,20	Δm	— 531,40
Vorherg. p	+ 13722,80	Vorherg. m	+ 22042,70
p′	+ 13557,60	m′	+ 21511,30

Digitized by Google

Correction der Coordinaten.

	Positiv.		Negativ.		Positiv.		Negativ.	
	Δp	Δm	Δp	Δm	Δp	Δm	Δp	Δm
	Klaftern.	Klaftern.	Klaftern	Klaftern.	Klaftern.	Klaftern.	Klaftern.	Klaftern.
Polygon A.			356,20	146,00			356,11	145.74
			352,30	177,70			352,21	177,44
	166,00			63,80	166,09			63,54
	166,00		708,50	387,50	166,09		708,32	386,72
			166,00	000,00			166,09	000,00
			542,50	387,50			542,23	386,72
		ΔY =	542,23	386,72=ΔX				
		Fehler =	+ 0,27	+ 0,78				
Polygon B.	282,60			334,30	284,47			334,64
	225,40			49,41	227,26			49,74
	508,00			383,71	511,73			384,38
	511,73	= ΔY	ΔX =	384,38				
	− 3,73	= Fehler	Fehler =	− 0,67				
Polygon C.	3,19	239,80	514,80		3,13	239,74	514,66	
		144,70				144,64		
	3,19	384,50	514,80		3,13	384,38	514,86	
			3,19				3,13	
			511,61				511,73	
	ΔX =	384,38	511,73	= ΔY				
	Fehler	=+ 0,12	− 0,12					

Digitized by Google

Diese Formularien sind für sich klar und bedürfen keiner weiteren Erörterung. Nur eine einzige Bemerkung möge hier ihre Stelle finden. Bei der Addition von Δp zu dem vorhergehenden p und ebenso bei der Addition von Δm zu dem vorhergehenden m müssen die corrigirten Werthe von Δp und Δm, welche sich auf der rechten Seite des letzten Formulars (S. 88.) befinden, genommen werden. Um z. B. die Ordinate von Johannisberg zu bekommen, addirt man zu der Zahl 14265,00 nicht die Gröfse — 356,20, welche sich unmittelbar darüber befindet, sondern die Gröfse — 356,11.

§. 37.

Wie schon früher bemerkt worden, mufs jeder Dreieckspunct ersten Rangs auch zugleich Dreieckspunct zweiten Rangs seyn, jeder Dreieckspunct zweiten Rangs auch zugleich Dreieckspunct dritten Rangs u. s. f. Keineswegs werden aber in einem Dreiecksnetze zweiten Rangs auch immer solche Seiten vorkommen, welche zugleich Seiten ersten Rangs wären. In einem solchen Falle verfahren wir auf folgende Art. Wir geben irgend einer Dreiecksseite zweiten Rangs eine willkührliche Gröfse, und berechnen mit dieser Basis alle anderen Seiten des Netzes. Dann stellen wir die Dreiecke zu Polygonen zusammen, und berechnen die Coordinatendifferenzen für die Puncte, welche nicht zugleich Puncte des ersten Rangs sind. Nehmen wir bei diesen Coordinatendifferenzen den Unterschied zwischen der Summe der positiven und der Summe der negativen Ordinatendifferenzen, so erhalten wir die Ordinatendifferenz der Puncte ef in Fig. 24. (wo wir durch okp, kpl, plq, lqf Dreiecke des zweiten Rangs und durch of eine Dreiecksseite des ersten Rangs vorstellen*)) in dem willkührlich ange-

*) Es wird übrigens vorausgesetzt, dafs aufser den Coordinaten von o und f auch die Winkel m, n, a, b bekannt seyen.

Digitized by Google

nommenen Maafse. Auf ähnliche Weise erhalten wir auch die Abscissendifferenz dieser Puncte in dem nämlichen Maafse.

Nennen wir die wahre Abscissendifferenz der Puncte of $= \Delta X$, die falsche $= \Delta X'$, die wahre Ordinatendifferenz $= \Delta Y$, die falsche $= \Delta Y'$. Die wahren Coordinatendifferenzen eines der übrigen Puncte drücken wir durch Δx, Δy aus, die falschen durch $\Delta x'$ und $\Delta y'$. Wir haben dann die Proportion:

$$\left.\begin{matrix}\Delta X' : \Delta X \\ \Delta Y' : \Delta Y\end{matrix}\right\} = \Delta x' : \Delta x = \Delta y' : \Delta y$$

oder:

$$\frac{(\log \Delta X' - \log \Delta X) + (\log \Delta Y' - \log \Delta Y)}{2} = \log \Delta x' - \log \Delta x = \log \Delta y' - \log \Delta y$$

Setzen wir das durch 2 dividirte Glied dieser Gleichung $= C$, so ist

$$\log \Delta x = \log \Delta x' - C$$
$$\log \Delta y = \log \Delta y' - C$$

Hat man auf diese Weise die wahren Werthe sämmtlicher Δy und Δx gefunden, so wird die oben (§. 35.) dargestellte Correction der Coordinatendifferenzen vorgenommen, und endlich werden die Coordinaten selbst (durch Addition der Coordinatendifferenzen zu den „vorhergehenden" Coordinaten) berechnet.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Von der Gemarkungs- und Parzellenvermessung.

§. 38.

Die Seiten des Umfangs der Gemarkungen werden mit dem Distanzmesser (Distanzlatte) bestimmt, oder mit Klafterstäben gemessen. Die Winkel der Gemarkungsgränzen werden mit dem Theodoliten beobachtet.

Zur Erleichterung der Parzellenmessung wird sodann jede Gemarkung in Fluren von 200 bis 300 Morgen eingetheilt, und bei der Messung der Umfangsseiten und Umfangswinkel dieser Fluren gerade so wie bei der Aufnahme der Gemarkungsgränzen verfahren.

Um Verschiebungen, welche leicht durch all zu kurze Umfangsseiten entstehen könnten, zu vermeiden, darf jedoch bei diesen Umfangsmessungen keine Seite angenommen werden, welche kleiner als 30 Klafter ist; kommen kleinere Seiten vor, so müssen sie übersprungen werden. Wenn wir z. B. in Fig. 25. durch ee', $e'e''$, $e''e'''$, $e'''d$ solche kleine Umfangsseiten vorstellen, so wird man in diesem Falle blofs die Entfernung von e nach d messen.

Zum Behufe der Coordinatenberechnung der Gemarkungs- und Flurumfangspuncte werden die Fluren in Polygone eingetheilt, wovon sich ein jedes an eine oder mehrere Dreiecksseiten dritten Rangs anschliefst.

Digitized by Google

Um auch die Coordinaten der übersprungenen Puncte bestimmen zu können, müssen übrigens die Winkel ege', ege'', ege''' und die Linien eg, $e'g$, $e''g$ etc. gemessen werden.

Es stelle aeg ein Dreieck des dritten Rangs vor, und es sey uns also das Azimuth der Seite ag bekannt.*) Wir finden daher in dem Polygone $abcdeg$ die Azimuthe der Seiten ab, bc, cd, ed, eg auf dem nämlichen Wege, den wir bei der Berechnung der Azimuthe der Dreiecksseiten zweiten etc. Rangs einzuschlagen haben.

Die Azimuthe der Seiten $e'g$, $e''g$ u. s. w. finden wir, indem wir nacheinander die Winkel ege', ege'' etc. zu dem Azimuth von eg addiren.

Haben wir auf diese Art die Azimuthe aller Polygonseiten gefunden, so können wir, da auch die Längen dieser Seiten bekannt sind, die Coordinatendifferenzen der Polygonpuncte berechnen. Bei der Correction dieser Coordinatendifferenzen wird ganz wie bei der Correction der Coordinatendifferenzen der Dreieckspuncte verfahren. Nur folgender Unterschied findet hierbei statt. Da die Umfangsseiten der Gemarkungen und Fluren mit Klafterstäben gemessen werden, so kann man annehmen, dafs je länger eine dieser Polygonseiten ist, auch ein um so gröfserer Fehler bei der Messung derselben begangen wurde. Da nun die Coordinatendifferenzen von der Länge der Seiten abhängig sind, so schlägt man bei der Vertheilung des Fehlers a (s. den §. 35.) auf die einzelnen Coordinatendifferenzen am besten folgendes Verfahren ein.

Wir sagen, die in Zollen ausgedrückte Summe sämmt-

*) Denn ehe die Flurvermessung begonnen wird, mufs die Coordinatenberechnung der Dreieckspuncte vollendet seyn.

Digitized by Google

licher Ordinatendifferenzen [wobei wir auch die negativen als positiv ansehen] verhält sich zu a, wie 10000 zu den Gesuchten. Durch diese Proportion finden wir, um wie viel eine Ordinatendifferenz von 10000 Zollen vergrösert, oder beziehungsweise verkleinert werden mufs; und wir können nun leicht sehen, um wie viel jede der Coordinatendifferenzen vermehrt oder vermindert werden mufs, um die erforderliche Gleichstellung der Zahlen D und $\triangle Y$ zu (§. 35.) bewirken.

Bei der Berechnung der Coordinaten selbst dienen die Coordinaten der Dreieckspuncte als „vorhergehende" Coordinaten.

Von jeder Flur wird eine genaue Gränzkarte im Maasstab von $\frac{1}{4000}$ der natürlichen Länge mit Hülfe der Coordinaten aufgetragen. In diese Flurkarten müssen alle Wege, Bäche, Gräben u. s. w. dem Augenmaafs nach eingetragen werden. Sämmtliche Fluren einer Gemarkung werden in einer Uebersichtskarte im Maafsstab von $\frac{1}{20000}$ der natürlichen Länge auf einem Blatte zusammengestellt. Eine zweite Uebersichtskarte für jeden Steuerbezirk wird im Maafsstab von $\frac{1}{100,000}$ der natürlichen Länge entworfen. Die Coordinaten werden bei der Entwerfung aller dieser Karten als grade, sich rechtwinklig durchschneidende Linien behandelt.

§. 39.

Es bleibt uns noch übrig darzustellen, wie man aus den gefundenen Coordinaten der Flurumfangspuncte die Flächeninhalte der Fluren berechnen kann. Sehen wir zu diesem Zwecke das Polygon ABCD'E (Fig. 23.) als eine solche Flur an.

Digitized by Google

Bezeichnen wir in derselben die Abscissen Dd, De, Da, Db, Dc durch x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, die Ordinaten dD', Ee, Aa, Bb, Cc durch y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}. Durch diese Coordinaten werden die fünf Paralleltrapezien D'E ed, Ee Aa, BA ba, CB cb, D'C dc gebildet, in welchen die parallelen Seiten y', y'', y''' .... und die senkrechten Entfernungen dieser Seiten, de, ea, ab, bc, dc $= (x''-x')$, $(x'''-x'')$, $(x^{IV}-x''')$ .... bekannt sind.

Aus dem bloßen Anblick der Figur ersieht man nun, daß der Flächengehalt F des Polygons D'EABC = ist den Trapezien AaBb, BbCc, CcD'd weniger den Trapezien D'Ede, AE ea.

Der eine Factor zur Berechnung dieser beiden letzten Trapezien, nämlich $(x''-x')$, $(x'''-x'')$ ist aber schon negativ; folglich ergeben sich die Zeichen der einzelnen Flächengehalte von selbst, und man kann allgemein sagen:

$$F = \frac{(y'+y'')}{2}(x''-x') + \frac{(y''+y''')}{2}(x'''-x'') + \left(\frac{y'''+y^{IV}}{2}\right)(x^{IV}-x''') + \left(\frac{y^{IV}+y^{V}}{2}\right)(x^{V}-x^{IV}) + \left(\frac{y^{V}+y'}{2}\right)(x'-x^{V})$$

oder:

$$2F = (y'+y'')(x''-x') + (y''+y''')(x'''-x'') + (y'''+y^{IV})(x^{IV}-x''') + (y^{IV}+y^{V})(x^{V}-x^{IV}) + (y^{V}+y')(x'-x^{V}).$$

Wird die Multiplication ausgeführt so erhält man:

$$\begin{aligned} 2F = {} & x''y' + y''x'' - y'x' - x'y'' \\ & + x'''y'' + y'''x''' - x''y'' - x''y''' \\ & + x^{IV}y''' + x^{IV}y^{IV} - x'''y''' - x'''y^{IV} \\ & + x^{V}y^{IV} + x^{V}y^{V} - x^{IV}y^{IV} - x^{IV}y^{V} \\ & + x'y^{V} + x'y' - x^{V}y^{V} - x^{V}y' \end{aligned}$$

Digitized by Google

worin die vertikalen Reihen der mittleren Glieder gleich und entgegengesetzt sind, und sich folglich gegen einander aufheben.

Ordnet man die übrigen Glieder einmal nach x und einmal nach y, so ergeben sich folgende sehr einfache Ausdrücke für die Berechnung des Flächengehaltes aus Coordinaten, nämlich:

$$2F = (y' - y''')x'' + (y'' - y^{IV})x''' + (y''' - y^{V})x^{IV} + (y^{IV} - y')x^{V} + (y^{V} - y'')x'$$

und

$$2F = (x''' - x')y'' + (x^{IV} - x'')y''' + (x^{V} - x''')y^{IV} + (x' - x^{IV})y^{V} + (x'' - x^{V})y'.$$

In Beziehung auf den fünften Punct kann man den ersten auch den sechsten und den zweiten auch den siebenten nennen, unter welcher Voraussetzung man im Allgemeinen erhält:

1) $2F = (y' - y''')x'' + (y'' - y^{IV})x''' + (y''' - y^{V})x^{IV} + \ldots\ldots + (y^{n} - y^{n+2})x^{n+1}$

oder

2) $2F = (x''' - x')y'' + (x^{IV} - x'')y''' + (x^{V} - x''')x^{IV} + \ldots\ldots (x^{n+2} - x^{n})y^{n+1}$

Zur Controle der Rechnung, bei der man sich zur Abkürzung der Arbeit der Crelle'schen Multiplicationstafeln bedienen kann, berechnet man den Flächengehalt der Fluren am besten zweimal und zwar einmal nach der Formel (1.) und das anderemal nach der Formel (2.). Beide Resultate müssen gleich seyn, wenn richtig gerechnet worden ist.

Aus der Summirung der Flächengehalte der einzelnen

Digitized by Google

Fluren ergibt sich endlich der Flächeninhalt der ganzen Gemarkung.

§. 40.

Zum Behufe der Parzellenmessung werden die Fluren in schickliche, aus mehreren Gewannen bestehende Unterabtheilungen zerlegt, deren Umfangswinkel und Umfangsseiten genau vermessen, und mit den in der Nähe liegenden Dreieckspuncten vierten Rangs in Verbindung gesetzt werden müssen.

Von den Gränzpuncten dieser Unterabtheilungen aus werden sodann die übrigen Gewannpuncte im Innern durch Richtung und Entfernung bestimmt.

Die Conturen der Gewanne dienen als Grundlage der Parzellenvermessung. Bei derselben müssen daher die Breiten der einzelnen Grundstücke auf den Gewannumfängen mit Genauigkeit gemessen, und alle diejenigen Puncte im Innern durch Kreuzscheibe und Mefsstange bestimmt werden, welche sich nur auf einzelne Parzellen beziehen, z. B. wenn einzelne Grundstücke in der Mitte quer durchgetheilt sind, u. dgl. Sind die Grundstücke gekrümmt, so ist es in der Regel am besten, dieselben durch quer durchgezogene Linien in solche Stücke zu zerlegen, welche als gradlinig betrachtet werden können. Die durchgezogenen Linien werden mit den Gewannumfängen in Verbindung gesetzt, und die Breiten der Grundstücke werden auf diesen Linien mit derselben Genauigkeit gemessen, wie auf den Gewannumfängen.

Ist die Aufnahme der Gewanne im Innern der Flur bedingt, so wird die Berechnung der Coordinaten der Gewannumfangspuncte vorgenommen, und hierbei nach den bekannten Regeln verfahren. Die Coordinate der Dreiecks-

Digitized by Google

puncte vierten Rangs dienen als „vorhergehende" Coordinaten. Die Gewann- und Parzellenkarten erhält man dadurch, dafs man den Umfang jeder Gewann mit Hülfe der Coordinaten in dem Maafsstabe von $\frac{1}{1000}$ der natürlichen Länge aufträgt, und sodann die Parzellen nach Maafsgabe ihrer gemessenen Breite einzeichnet.

Die Berechnung des Inhaltes der Gewanne wird ganz auf dieselbe Weise bewirkt, wie die Berechnung des Inhaltes der Fluren. Diese Berechnung der Inhalte mufs daher nach den schon oben §. 39. gefundenen Formeln

$$2\,F = (y' - y'')\,x'' + \ldots\ldots + (y^n - y^{n+2})\,x^{n+1}$$

und

$$2\,F = (x''' - x')\,y'' + \ldots\ldots + (x^{n+2} - x^n)\,y^{n+1}$$

doppelt geführt werden, und ihre Ergebnisse müssen mit den bekannten Inhalten der Fluren vollständig übereinstimmen.

Die Berechnung des Inhaltes aus den Coordinaten nach obiger Vorschrift ist indessen blofs für die Hauptpuncte des Umfangs erforderlich, während die allenfallsigen kleinen Krümmungen, welche besonders mit Kreuzscheibe und Mefstange gemessen worden sind, aus den auf dem Felde gefundenen Dimensionen berechnet, und zu den Inhalten aus den Coordinaten algebraisch addirt werden können.

Da von den einzelnen Parzellen immer zwei Seiten, durch unmittelbare Messung auf dem Felde, bekannt sind, so findet man den Flächeninhalt jeder Parzelle auf folgende Art. Es sey (Fig. 26.) bc de eine Parzelle und bc, de die gemessenen Seiten. Man denke sich die Parzelle auf der Gewannkarte in zwei Dreiecke (dbc und cde) getheilt, und messe sodann mit Hilfe einer eingetheilten Glastafel die rechtwinkligen Entfernungen der Spitzen c und d von den verlän-

Digitized by Google

gerten Grundlinien df und ac. Der Inhalt der Parzelle ist nun $= \frac{(bc)(ad) + (cf)(de)}{2}$

Die Inhalte der einzelnen Parzellen jeder Gewann werden hierauf addirt, und die Summe mit dem aus den Coordinaten berechneten Inhalte der Gewann verglichen. Die Differenz beider Resultate, welche nur sehr unbedeutend seyn darf, wird auf die einzelnen Parzellen vertheilt, so dafs nunmehr die Flächengehalte der letzteren mit dem Flächengehalte der Gewanne und Fluren vollständig übereinstimmen.

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

Von den Höhenmessungen.

Erstes Capitel.

Von der Höhenmessung mit dem Barometer.

§. 41.

Es seyen in der Atmosphäre zwei Puncte gegeben, deren Höhenunterschiede bestimmt werden sollen. Es fragt sich, wie wir hierbei zu verfahren haben.

Bemerken wir zuvörderst, dafs, wenn eine Masse Luft im Gleichgewicht ist, alle Theile einer und derselben horizontalen Schichte, einen gleichmäfsigen Druck erleiden, und dafs das Barometer, als der Maafsstab dieses Druckes, in der ganzen Schichte auf derselben Höhe bleiben wird. Bei den Höhenmessungen mit dem Barometer kommt es also nicht darauf an, an welchem Orte einer und derselben Luftschichte die Beobachtungen gemacht werden. Der Einfachheit halber stellen wir uns daher vor, die beiden Puncte, deren Höhendifferenz bestimmt werden soll, lägen senkrecht übereinander, und seyen durch eine Luftsäule mit einander verbunden. Nehmen wir zuerst an, die Luft habe Null Grad Temperatur, sey gänzlich trocken, und habe in allen ihren Theilen gleiche Schwerkraft, nämlich diejenige, welche auf der Meeresfläche unter 45° Breite statt findet.

Dieſs vorausgesetzt sey

x = Länge der Luftsäule, oder die gesuchte Höhendifferenz.

Digitized by Google

H = Höhe des Quecksilbers im Barometer auf der unteren Station.

h = Höhe des Quecksilbers im Barometer auf der oberen Station.

T = Temperatur des Quecksilbers im Barometer auf der unteren Station.

T′ = Temperatur des Quecksilbers im Barometer auf der oberen Station.

t = Temperatur der Luft auf der unteren Station.

t′ = Temperatur der Luft auf der oberen Station.

P = spec. Gewicht des Quecksilbers von 0° Grad Temp. (= 13,599 nach Biot und Arago.)

p = spec. Gew. des Quecksilbers im Barometer auf der unteren Station.

p′ = spec. Gew. des Quecks. im Barom. auf der oberen Station.

Q = spec. Gew. oder Dichte der trocknen Luft im 45. Grad der Breite mit 0° Temp. und einem Barometerstand = 0,76 Met. = 30,4 darmstädter Zoll. Nach Biot und Arago ist Q = 0,0012992511.

q = Dichtheit oder spec. Gew. der Luft an der unteren Station.

q′ = Dichtheit oder spec. Gew. der Luft an der oberen Station.

§. 42.

Das Gewicht der Quecksilbersäule eines Barometers ist eben so grofs, wie das einer Luftsäule von demselben Durchmesser, welche sich senkrecht von dem Instrument bis an die obere Gränze der Atmosphäre erhebt. Nun ist aber das absolute Gewicht des Quecksilbers im Barometer auf der unteren Station = pH, indem wir die Grundfläche der Queck-

Digitized by Google

silbersäule = 1 setzen*); denselben Werth wird also auch das Gewicht der entsprechenden Luftsäule besitzen. Ebenso wird das absolute Gewicht der Luftsäule, welche sich auf der oberen Station erhebt, = p′h seyn. Die Luftsäule zwischen den beiden Stationen ist aber weiter Nichts, als die Differenz zwischen den beiden atmosphärischen Säulen, und das absolute Gewicht dieser Differenz ist offenbar = pH — p′h, Denken wir uns nun die Luft in lauter unendlich dünne Schichten zertheilt, so ist das Gewicht derjenigen, welche sich auf der oberen Station, d. h. in einer Höhe = x befindet, = dem Volumen (1 . dx) multiplicirt durch das spec. Gewicht q′ also = q′ . dx, und das Gewicht der ganzen Säule = $\int q' \, dx$. Man hat demnach:

$$\int q' \, dx = pH - p'h$$

Da nach dem Mariottischen Gesetze die Dichtheit der Luft der zusammenpressenden Kraft proportional ist, so ist ferner:

$$q : q' = pH : p'h$$

Den Werth von p′h in die obige Gleichung substituirt gibt:

$$\int q' \, dx = pH - \frac{pH}{q} \cdot q'$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$q' \, dx = - \frac{pH}{q} \, dq' \text{ oder } dx = - \frac{pH}{q} \cdot \frac{dq'}{q'}$$

Das Integral hiervon ist:

$$x = - \frac{pH}{q'} \cdot \log \text{ nat } q' + C$$

---

*) Das absolute Gewicht eines Gegenstandes ist = Cubikinhalt dieses Gegenstandes multiplicirt mit dem specifischen Gewichte desselben. Der Cubikinhalt der Quecksilbersäule ist aber = der Grundfläche derselben multiplicirt mit ihrer Höhe.

Digitized by Google

Die Constante C bestimmt man durch die Betrachtung, dafs für $x = o$ $q' = q$ ist. Die Gleichung wird daher:

$$x = \frac{pH}{q} (\log \text{nat } q - \log \text{nat } q') = \frac{pH}{q} \log \text{nat } \frac{q}{q'}$$

$$= \frac{pH}{q} \log \text{nat } \frac{pH}{p'h}$$

(nach der obigen Proportion $q : q' = pH : p'h$). Ebenso hat man auch $pH : q = P \cdot 0{,}76 : Q$ oder $\frac{pH}{q} = \frac{P \cdot 0{,}76}{Q}$

Mithin:

$$x = 0{,}76 \frac{P}{Q} \log \text{nat } \frac{p \cdot H}{p'h}$$

Der constante Coefficient $\left(0{,}76 \frac{P}{Q}\right)$ ist weiter Nichts, als die Länge einer Quecksilbersäule von 0,76 Meter, vergrössert in dem Verhältnisse von Q zu P, d. h. im Verhältnisse der Dichtheit der Luft zu der Dichtheit des Quecksilbers, er repräsentirt also offenbar die Höhe einer Luftsäule, deren Dichtheit durchaus = Q und deren Gewicht = 0,76 Meter Quecksilber, und ist also auch gleich dem Gewicht einer von der Meeresfläche an gerechneten Luftsäule, weil 0,76 Meter die Höhe des Barometers am Spiegel des Meeres ist. Also: der constante Coefficient $0{,}76 \frac{P}{Q}$ ist nichts Anderes als die Höhe der Atmosphäre, unter der Annahme, dafs die Temperatur der Luft = 0° ist, und dafs sie in allen ihren Theilen eine solche Dichtheit besitzt, wie an der Oberfläche des Meeres.

Die durch die Integration entstandenen Logarithmen der Formel sind s. g. natürliche oder hyperbolische. Da aber $\log \text{nat } x = \frac{\log \text{brigg } x}{m}$ (wo m den Modulus des Brig-

Digitized by Google

gischen Systems. = 0,4342945 bedeutet), so können wir auch, wenn wir den natürlichen Logarithmen einer Zahl aufsuchen wollen, aber keine Tafeln der natürlichen Logarithmen besitzen, den Briggischen Logarithmen der Zahl aufsuchen, müssen aber denselben durch m dividiren. Substituiren wir dann statt P und Q ihre von Biot und Arago gefundenen Zahlenwerthe, so hat man

$$x = 18317 \log . \frac{pH}{p'h} \text{ *)}$$

§. 43.

Nach dem Vorhergehenden drückt der Werth von x die Länge einer Luftsäule aus, an deren beiden Endpuncten die Pressungen pH und p'h statt finden, und deren Temperatur durchaus = 0° ist. Wenn sich aber diese Temperatur ändert, so wird sich auch die Länge der Luftsäule ändern. Denn wenn sich der Wärmestoff vermehrt, so dehnt sich die Luft aus, vermindert er sich, so zieht sich letztere zusammen; und während dieser Aenderungen in der Länge der Säule, erleiden die an ihren Endpuncten befestigten Barometer keine Aenderungen, weil die Luftmassen, welche von diesen Endpuncten getragen werden, vor wie nach dieselben bleiben, obgleich sich die Entfernung beider Instrumente von einander vergröfsert oder resp. vermindert. Denselben Barometer-

---

*) Denn es ist:

log (P = 13,599) = ...	1,1335070
log 0,76 Met. = ...	9,8808136
compl. log (Q = 0,0012992511) =	2,8863074
compl. log (m = 0,4342945) =	0,3622157
$\log 0{,}76 . \frac{P}{Q . m}$ =	4 . 2628437

Daher $0{,}76 \frac{P}{Q . m} = 18317$

Digitized by Google

ständen können also verschiedene Werthe von x correspondiren.

Gay-Lussac fand, dafs das Volumen einer Luftmasse, die wir bei 0° Temperatur = 1 setzen, sich bei jeder Temperaturerhöhung von 1 Grad Celsius um 0,00375 vergröfsert. Wenn also die Länge x der Luftsäule für 0° Temp. durch die Gleichung gegeben ist, so erhält man die Länge von x für jeden andern Grad (α) der Temperatur, wenn man den Werth jener Länge mit $(1 + 00375\ \alpha)$ multiplicirt. — Es ist also erforderlich, den mittleren Temperaturgrad der ganzen Säule zu kennen. Um diesen zu finden, mufs uns bekannt seyn: 1) Die Temperatur der beiden äufsersten Puncte der Säule. 2) Das Gesetz, nach welchem die Temperatur sich von einem Puncte zum andern vermindert. Dieses Gesetz ist aber bis jetzt noch nicht ermittelt worden. Näherungsweise setzen wir daher α oder die mittlere Temperatur der Säule

$$= \frac{t + t'}{2}.$$

§. 44.

Die Wirkung der Wärme auf das Quecksilber kann ebenfalls nicht unberücksichtigt bleiben.

Das Quecksilber ist nämlich an der obern Station kälter als an der untern, der Druck oben ist demnach mit einem kleineren Maafsstabe gemessen, als der Druck unten. Daher ist folgende Correction nöthig.

Wenn T die Temperatur des Quecksilbers unten, T' die Temperatur des Quecksilbers oben bezeichnet, so ist nach den Versuchen von Lavoisier und Laplace die Ausdehnung des Quecksilbers auf der unteren Station $= 1 + \frac{T}{5412}$, auf der oberen Station dagegen

Digitized by Google

$= 1 + \frac{T'}{5412}$, wo 1 den Raum bezeichnet, welchen das Quecksilber bei 0° Temp. einnimmt. Es verhält sich aber dieser Raum für die Ausdehnung des Quecksilbers bei 0° zu der Ausdehnung desselben bei T Grad $\left(1 + \frac{T}{5412}\right)$, wie das spec. Gewicht des Quecksilbers bei T Grad zu dem spec. Gew. des Quecksilbers bei Null Grad Temp., welches Alles für die untere Station gilt. Oder:

$$1 : 1 + \frac{T}{5412} = p : P,$$

daher $$p = \frac{P}{1 + \frac{T}{5412}}$$

Für die obere Station haben wir ebenso:

$$p' = \frac{P}{1 + \frac{T'}{5412}}$$

daher

$$\frac{p}{p'} = \frac{P}{1 + \frac{T}{5412}} : \frac{P}{1 + \frac{T'}{5412}} = \frac{1 + \frac{T'}{5412}}{1 + \frac{T}{5412}}$$

Diesem letzteren Ausdrucke kann man auch eine andere Gestalt geben, wenn man Zähler und Nenner durch $1 + \frac{T'}{5412}$ dividirt. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{p}{p'} = \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{5412}\right) : \left(1 + \frac{T'}{5412}\right)} = \frac{1}{(5412 + T) : (5412 + T')}$$

Führen wir im Nenner die angedeutete Division aus:

Digitized by Google

$$5412+T' \mid 5412+T \mid 1+\frac{T-T'}{5412}-\frac{TT'-T'^2}{(5412)^2}+\frac{TT'^2-T'^3}{(5412)^3}-\ldots.$$

$$\frac{5412+T'}{T-T'}$$

$$\frac{T-T'+\frac{TT'-T'^2}{5412}}{-\frac{TT'-T'^2}{5412}}$$

$$-\frac{\frac{TT'-T'^2}{5412}-\frac{TT'^2-T'^3}{(5412)^2}}{+\frac{TT'^2-T'^3}{(5412)^2}}$$ u. s. w.

Alle Theilsätze des Quotienten, welche auf den zweiten folgen, können wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden. Der Ausdruck

$\frac{p}{p'}=\frac{1+\frac{T'}{5412}}{1+\frac{T}{5412}}$ hat also jetzt die Gestalt: $\frac{1}{1+\frac{T-T'}{5412}}$

Es ist demnach:

$$\log\frac{pH}{p'h}=\log H-\log h-\log\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$$

Entwickelt man $\log\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$ nach der bekannten Formel:

$$\log(1+u)=m\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots\right)$$

so erhält man näherungsweise:

$$\log\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)=m\left(\frac{T-T'}{5412}\ldots.\right)$$

Es ist ferner, wenn wir durch e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, durch a die Basis eines beliebi-

Digitized by Google

gen andern Systems, und durch S den log. nat. von a bezeichnen,

$$a = e^S;\ a^{\frac{1}{S}} = e;\ \frac{1}{S} = \text{Modulus} = m;\ a^m = e;$$

$$m \overset{\cdot}{\log} a = \overset{\cdot}{\log} e;\ \text{also}\ m = \frac{\overset{\cdot}{\log} e}{\overset{\cdot}{\log} a},\ \text{oder, da}\ \overset{\cdot}{\log} a = 1,$$

so ist $m = \overset{\cdot}{\log} e$. (Der Modulus eines Logarithmensystems ist also = dem in diesem Systeme aufgesuchten Logarithmen von e.). Daher:

$$\log\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) = \left(\frac{\overset{\cdot}{\log} . e}{5412}\right)(T - T')$$

$$= \log\left(e^{\frac{1}{5412}}\right) . [T - T'].$$

Entwickelt man $e^{\frac{1}{5412}}$ nach der Formel

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

so erhält man näherungsweise:

$$e^{\frac{1}{5412}} = 1 + \frac{1}{5412} + \cdots$$

Daher

$$\log\left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) = \log\left(e^{\frac{1}{5412}}\right)[T - T']$$

$$= \left[\log\left(1 + \frac{1}{5412}\right)\right][T - T']$$

$$= 0{,}000080\ (T - T').$$

Wir erhalten nach diesen Betrachtungen folgenden Werth von x:

$$x = 18317\left\{1 + 0{,}00375\,\frac{t + t'}{2}\right\}\{\log H - \log h - 0{,}00008\,(T - T')\}$$

Digitized by Google

§. 45.

Wir haben die Luft bisher als gänzlich trocken angenommen; allein in ihrem gewöhnlichen Zustande ist sie stets mit einer gröfseren oder kleineren Menge von Wasserdünsten vermischt, welche zwar ein geringeres Gewicht, aber eine gleiche Elasticität wie die Luft besitzen, und dazu beitragen, die Dichtheit der letzteren zu vermindern. An der Länge x der Luftsäule mufs daher eine weitere Correction wegen dieser Wasserdünste angebracht werden. Diese Länge mufs nämlich in dem Verhältnisse vergröfsert werden, als sich die Dichtheit der Luft durch die Wasserdünste vermindert. Wenn also Δ diese Verminderung ausdrückt, so mufs x noch mit $1 + \Delta$ multiplicirt werden.

Um bei einer Luftmasse von kleinem Volumen die Menge der darin enthaltenen Wasserdünste und also den Werth von Δ kennen zu lernen, reicht es hin, den Stand des Hygrometers und Thermometers in dieser Luftmasse zu beobachten. Allein dieses Mittel ist bei einer hohen atmosphärischen Säule nicht mehr anwendbar; und da aufserdem die durch die Anwesenheit der Dünste bewirkte Abnahme der Dichtheit sehr vielen Unregelmäfsigkeiten unterworfen ist, so wird man also keine genaue Formel für die hygrometrische Correction auffinden können, und wird sich mit einer mittleren Correction begnügen müssen. Suchen wir also diejenige, welche dem gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre in unseren Climaten entspricht.

Die durch die Wasserdünste bewirkte Verminderung der Dichtheit der Luft übersteigt in der unteren Luftregion selten 0,006 bis 0,007, und beträgt niemals weniger als 0,002, wenn wir die Zeiten ausnehmen, wo der Thermometer 0° oder noch weniger zeigt. Bei einer solchen Temperatur pflegt man aber auch keine Höhe zu beobachten. Die mittlere

Digitized by Google

Verminderung wird also = 0,004 seyn: sie hat wirklich diesen Werth, wenn der Thermometer 17, der Hygrometer 80 Grad zeigt. Diefs ist nämlich der mittlere Stand dieser Instrumente während derjenigen Jahreszeit, in welcher die Beobachtungen gewöhnlich angestellt werden (April bis October). Allein in höheren Regionen ist die Menge der Dünste viel geringer, und die Verminderung Δ ist daselbst weniger bedeutend. Nach den Beobachtungen von Saussure und Humboldt scheint Δ für Höhen von 2000 Metern in unseren Breiten 0,002 bis 0,003 zu seyn. Für Höhen von 500 bis 1500 Met. kann man also $\Delta = 0{,}0035$ annehmen, und der hygrometrische Factor $1 + \Delta$ ist also = 1,0035. Wenn man denselben als constant annimmt, so kann man ihn mit dem Coefficienten verschmelzen, welcher also aus 18317 in 18381 übergeht. Denn es ist

$$\log 18317 = 4{,}2628437$$
$$\log 10035 = 0{,}0015174$$
$$\log 18381 = 4{,}2643611$$

Um die mittlere hygrometrische Correction zu bestimmen, gibt es noch eine andere Methode, welche von Laplace, Biot, Ramond und Arago angegeben worden ist. Diese besteht darin, dafs man den von der Temperatur abhängigen Ausdehnungscoefficienten der Luft ein wenig vergröfsert, weil die Atmosphäre in der warmen Jahrszeit die meisten Dünste enthält, welche, wie schon bemerkt worden, eine gleiche Elasticität wie die Luft haben.

Auf diese Weise erhält man nahe:

$$x = 18317\,[\log H - \log h - 0{,}00008\,(T - T')]\,\left[1 + 0{,}004\left(\frac{t + t'}{2}\right)\right]$$

Digitized by Google

§. 46.

Laplace hat noch zwei andere Correctionen in die Formel gebracht, nämlich:

a) wegen der Veränderlichkeit der Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde in der Richtung des Meridians;

b) wegen der Veränderung der Schwerkraft in vertikaler Richtung.

Die Schwerkraft wird bekanntlich immer gröfser, je mehr wir uns dem Mittelpuncte der Erde nähern. Da nun die Erde am Aequator höher ist, als an den Polen, so wird auch die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde vom Aequator bis zu den Polen immer zunehmen. Es ist ferner bekannt, dafs, aus eben dieser Ursache, ein und dasselbe Pendel am Aequator in derselben Zeit weniger Schwingungen macht, als an den Polen und dafs daher das Secundenpendel in den Polargegenden länger seyn mufs, als das Secundenpendel in den Tropenländern. Durch genaue Untersuchungen hat man gefunden, dafs die Gröfse der Schwerkraft in dem nämlichen Verhältnisse wächst und abnimmt, wie die Länge des Secundenpendels. Nach Laplace (*Mécanique céleste, liv. 3.*) ist aber diese Länge für eine jede beliebige geographische Breite β = 0,990631 Met. + (0,005637 Met.) sin $^2\beta$, oder in Grofsherzoglich Hessischem Maafse, = 39,62524 Zolle + (0,22548 Zolle) sin $^2\beta$, wo 39,62524 = l die Länge des Secundenpendels unter dem Aequator und 0,22548 = a die Zunahme des Secundenpendels vom Aequator bis zu den Polen bedeutet. Hieraus folgt die Länge des Secundenpendels für 45° Breite $= l + a\frac{1}{2}$, weil: $(\sin 45)^2 + (\cos 45^0)^2 = 1$, oder $2(\sin 45^\circ)^2 = 1$, also $(\sin 45)^2 = \frac{1}{2}$ ist.

Da die Dichtheit Q der Luft, welche bei der Bildung

Digitized by Google

des constanten Coefficienten in Anschlag kam, für den 45. Grad der Breite berechnet war, so bedarf die Formel für diese mittlere Breite keiner Correction, und wir setzen defshalb $1 + a\,\frac{1}{2} = 1$. Für jede andere Breite ist dann die Länge des Secundenpendels $= \frac{1 + a \sin^2 \beta}{1 + \frac{1}{2} a}$. Führen wir die Division aus, so erhalten wir den Quotienten:

$1 + \frac{a}{l} \sin^2\beta - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{l}$, oder, indem wir statt $\sin^2\beta$ seinen Werth $1 - \cos^2\beta$ setzen, $1 + \frac{a}{l} - \frac{a \cdot \cos^2\beta}{l} - \frac{a}{2l}$

$= 1 + \frac{2a}{2l} - \frac{2a \cdot \cos^2\beta}{2l} - \frac{a}{2l} = 1 + \frac{a}{2l} - \frac{2a \cdot \cos^2\beta}{2l}$

$= 1 - \frac{a}{2l} (2 \cos^2\beta - 1) = 1 - \frac{a}{2l} (\cos 2\beta)$

$= 1 - \frac{0{,}22548 \text{ Zoll}}{2\,(39{,}62524 \text{ Zoll})} (\cos 2\beta) = 1 - 0{,}00284 \cos 2\beta$,

und das Verhältnifs der Pendellänge bei 45° zu dieser Länge ist $= \frac{1}{1 - 0{,}00284 \cos 2\beta}$. Wie schon oben bemerkt worden, wächst aber die Gröfse der Schwerkraft in dem nämlichen Verhältnisse, wie die Länge des Secundenpendels, es findet daher die Gleichung statt: $1 : 1 - 0{,}00284 \cos 2\beta =$ Schwerkraft unter 45°: Schwerkraft unter der Breite $\beta =$ Dichtheit Q der Luft unter 45° zur Dichtheit der Luft unter $\beta°$. Also Dichtheit der Luft unter $\beta° = (1 - 0{,}00284 \cos 2\beta)\,Q$. In den Coefficienten $0{,}76\,\frac{P}{Q \cdot m}$ haben wir also jetzt statt Q zu setzen: $Q\,(1 - 0{,}00284 \cos 2\beta)$, d. h. wir haben den Coefficienten $0{,}76\,\frac{P}{Q \cdot m} = 18317$ mit $\frac{1}{1 - 0{,}00284 \cos 2\beta} = 1 + 0{,}00284 \cos 2\beta$ zu multipliciren.

Digitized by Google

§. 47.

Die Schwerkraft vermindert sich ferner in dem Maafse, als man sich in vertikaler Richtung in der Atmosphäre erhebt, so dafs die zwischen beiden Stationen enthaltene Luftsäule in der Wirklichkeit einer kleineren Schwerkraft unterworfen ist, als diejenige ist, welche wir unterstellt haben. Wir nahmen nämlich an, dafs diese Schwerkraft durchaus so grofs sey wie am Spiegel des Meeres. Die Dichtheit der Säule ist also geringer, als wir angenommen haben, uud die Länge x mufs daher im Verhältnifs der Verminderung der Dichtheit vergröfsert werden. Wir wollen die wahre Gröfse der Säule durch x' bezeichnen.

Der in jedem Theile der Säule x wirkenden Schwerkraft S entspricht eine Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte der Erde, wo r die Entfernung der Oberfläche des Meeres von diesem Puncte bedeutet. Es sey ferner die Schwerkraft, welche am untern Ende der Säule x' wirkt $= S'$ und die am obern Ende wirkende $= s$, so kann man annehmen, die Luftsäule x' sey ebenso wie die Luftsäule x in allen ihren Theilen der Wirkung einer gleichmäfsigen Schwerkraft $\left(\frac{S' + s}{2}\right)$ unterworfen. Dieser Schwerkraft $\frac{S' + s}{2}$, welche in der That in dem Mittelpuncte der Säule x' wirkt, entspricht eine Entfernung $= r + a + \frac{1}{2} x$ vom Mittelpuncte der Erde, wo a die Höhe der unteren Station über der Meeresfläche bedeutet.

Es sey ferner Fig. 27. die Säule $Ss = x'$, $po = a$, MF die Meeresfläche. Da nun, wie gesagt, der in jedem Theile der Säule x wirkenden Schwerkraft eine Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte der Erde entspricht, so müssen wir uns vorstellen, die Säule x habe die Lage gfde. Es findet

Digitized by Google

dann, weil die Schwerkraft im Verhältnifs des Quadrates der Entfernung vom Centrum der Erde abnimmt, die Proportion statt:

$$(r + a + \frac{1}{2} x)^2 : r^2 = S : \frac{S' + s}{2} = x' : x, \text{ also}$$

$$x' = \frac{x (r + a + \frac{1}{2} x)^2}{r^2}$$

Entwickelt man den Factor $(r + a + \frac{1}{2} x)^2$ nach dem binomischen Lehrsatze, so folgt näherungsweise:

$$x' = x \left(\frac{r^2 + 2 r (a + \frac{1}{2} x)}{r^2}\right) = x \left(1 + \frac{2 a + x}{r}\right)$$

Ist die untere Station die Meeresfläche, so hat man

$$x' = x \left(1 + \frac{x}{r}\right).$$

Bedenkt man, dafs die meisten Barometermessungen in den mittleren Regionen von 400 — 500 Gr. Hess. Klaftern gemacht werden, so kann man in dem Factor $1 + \frac{x}{r}$ statt x näherungsweise den Werth 450 Kl. setzen. Substituiren wir aufserdem statt r seinen mittleren Werth = 2546480 Gr. Hess. Kl. so folgt:

$$1 + \frac{x}{r} = \frac{r + x}{r} = \frac{2546480 + 450}{2546480}$$

Dieser Werth mufs mit der unverbesserten Höhe x multiplicirt werden, um die verbesserte x' zu erhalten. Wir können jedoch den Werth von $1 + \frac{x}{r}$ eben so gut auch mit dem constanten Coefficienten der unverbesserten Höhe nämlich mit 18317 multipliciren, und erhalten dann:

$$18317 \left(\frac{450 + 2546480}{2546480}\right) = 18324$$

Digitized by Google

§. 48.

Nimmt man das bisher Gesagte zusammen, so ist die vollständige Formel für x':

$$x' = x\left(1 + \frac{x}{r}\right) \quad \text{und}$$

$$x = 18317\ (1 + 0{,}00284\cos 2\beta)\ [1 + 0{,}002\ (t + t')]\ [\log H - \log h - 0{,}00008\ (T - T')].$$

Wenn man die Breite $= 50°$ setzt, und den Näherungswerth von $1 + \frac{x}{r}$ mit dem constanten Coefficienten der unverbesserten Höhe multiplicirt, so erhält man

$$x' = 18324\ (1 - 0{,}00284 \sin 10°)\ [1 + 0{,}002\ (t + t')]\ [\log H - \log h - 0{,}00008\ (T - T')] =$$

$$18315\ (\log H - \log h - 0{,}00008\ (T - T')\ [1 + 0{,}002\ (t + t')].$$

Diese Formel gilt für Meter. Für Grofsherzogl. Hess. Klafter geht der Coefficient 18315 in 7326 über, und es ist also endlich

$$x' = 7326\ (\log H - \log h - 0{,}00008\ (T - T')\ [1 + 0{,}002\ (t + t')].$$

Zur leichtern Ausführung der Rechnung ist nach dieser Formel das nachstehende Formular entworfen worden.

Digitized by Google

Station.	Barometer.	Temperatur des Quecksilbers.	Temperatur der Luft.	Berechnung in Grofsherzogl. Hess. Klaftern.			
	Zolle.	Cent. Gr.	Cent. Gr.				
Darmstadt	B = 30,150	T = 19,5	t = 20,0	log B	1,47929	log. 7326	3,86487
				log b	1,44623	log 1	8,51415 — 10
Taufstein	b = 27,940	T′ = 14,6	t′ = 14,4	$\log \frac{B}{b}$	0,03306	$\log\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)$	0,02890
		4,9	34,4				
				$-8\left(\frac{T-T'}{100000}\right)$	0,00039	log Δ H	2,40792
						Δ H	255,8
						H	53,2
				I	0,03267	H′	309,0

Digitized by Google

In diesem Formulare ist

B der Barometerstand am Hauptorte (Darmstadt).

T die Temperatur des Quecksilbers an dem Hauptorte.

t die Temperatur der Luft an dem Hauptorte.

$\triangle H$ die Höhendifferenz.

H' die Höhe der neuen Station über der Meeresfläche.

b der Barometerstand auf der neuen Station.

T' die Temperatur des Quecksilbers auf der neuen Station.

t' die Temperatur der Luft auf der neuen Station.

H die Höhe des Hauptortes über der Meeresfläche.

Zweites Capitel.

Von den trigonometrischen Höhenmessungen.

§. 49.

Es sey in Figur 28. S der Gipfel des Berges, dessen Höhe gemessen werden soll, B sey der Ort des Beobachters, BM die Höhe des Punctes B über der Meeresfläche, welche wir uns unter dem festen Lande fortgeführt denken, ebenso Sm die Höhe des Punctes S über der Meeresfläche, bm = BM und Z der Zenithpunct des Beobachters in B. Durch die Wirkung der Strahlenbrechung wird dem Beobachter der Punct S etwas höher zu liegen scheinen, als es in der Wirklichkeit der Fall ist. Stellen wir in der Figur durch $S'b$ die scheinbare Höhe vor, so ist SBS' der Refractionswinkel $= \varrho$, welcher um so gröfser seyn wird, je weiter der Beobachter B von der Höhe Sb entfernt ist, und je mehr sich also die Linie BS dem Horizonte des Beobachters nähert. Nach den Beobachtungen von Delambre ist dieser Winkel $\varrho = 0{,}08$ des Winkels, welchen die beiden Radien GB und SG am Mittelpuncte der Erde mit einander bilden.

Digitized by Google

Ist uns nun durch die Triangulation die Entfernung der Puncte M und m gegeben, welche wir hier ohne merklichen Fehler als geradlinig annehmen und $= Bb$ setzen können, so findet man die Höhe Sb auf folgende sehr einfache Weise. Man mifst den Winkel $ZBS' = z$, addirt zu demselben den Winkel ϱ, und zieht hierauf diese Summe von dem Winkel ZBb ab, welchen wir näherungsweise als einen rechten ansehen, wodurch wir die Gröfse des Winkels $SBb = x$ erhalten. Die Tangente von SBb multiplicirt mit der Linie $Bb = S$ gibt endlich die Höhe $Sb = H$.

Es ist aber $z + \varrho + x +$ Winkel $bBG = 2\,\Re$. Es ist ferner in dem Dreiecke bBG die Summe der Winkel G, GBb und $GbB = 2\,\Re$, oder $G + 2\,bBG = 2\,\Re$, oder $bBG = \frac{2\,\Re - G}{2}$. Substituiren wir diesen Werth von bBG in die Gleichung $z + \varrho + x + bBG = 2\,\Re$, so folgt: $z + \varrho + x + \frac{2\,\Re - G}{2} = 2\,\Re$, also $x = 2\,\Re - \frac{2\,\Re - G}{2} - z - \varrho = 2\,\Re - \Re + \frac{G}{2} - z - \varrho = \Re + \frac{G}{2} - z - \varrho = \Re - (z + \varrho - \frac{1}{2}\,G)$. Also $H = S \cdot \mathrm{tg}\,[\Re - (z + \varrho - \frac{1}{2}\,G)] = S \cdot \cot\,[z + \varrho - \frac{1}{2}\,G]$, oder nach gehöriger Substitution,

$= S \cdot \cot\,[z + G\,(0{,}08) - G\,(0{,}5)] = S \cdot \cot\,[z - (0{,}42)\,G]$

Den Winkel G am Mittelpuncte der Erde finden wir durch die Betrachtung, dafs $r \cdot \sin\frac{1}{2}\,G = \frac{1}{2}\,S$ ist, woraus folgt: $\sin\frac{1}{2}\,G = \frac{\frac{1}{2}\,S}{r}$. Da G immer nur sehr klein

Digitized by Google

ist, so können wir auch setzen: $\frac{1}{2}$ G . sin 1″ $= \frac{\frac{1}{2} S}{r}$

oder $G = \frac{S}{r \cdot \sin 1''}$

Substituiren wir den Werth von G in die Gleichung $H = S \cot [z - (0{,}42)\ G]$ so folgt:

$$H = S \cdot \cot \left[z - (0{,}42) \frac{S}{r \cdot \sin 1''}\right] = S \cdot \cot [z - c]$$

$= S \cot z'$, wo c die Correction $0{,}42 \frac{S}{r \cdot \sin 1''}$ der unverbesserten Zenithdistanz und z′ die verbesserte Zenithdistanz ausdrückt.

Zu dem gefundenen Werthe von H mufs man noch die Höhe i des Stativs, auf welchem sich das Beobachtungsinstrument befindet, addiren. Da man ferner bei der Messung des Winkels ZBS′ immer die Spitze des Signals pointirt, das sich auf dem Gipfel des Berges befindet, dessen Höhe gesucht werden soll, so mufs man von der Summe H + i noch die Höhe n des Signals subtrahiren. Addirt man endlich zu dem Ausdrucke H + i — n = △h noch die Höhe h des Beobachtungsortes über der Meeresfläche, so erhält man die gesuchte Entfernung h′ des Punctes S von dem Puncte m (Fig. 28.).

Zur bequemen Ausführung der trigonometrischen Höhenberechnungen kann man sich des nachstehenden Formulars bedienen.

Digitized by Google

Station: Herchenhainer Höhe.						Neuer Punct: Taufstein.							
Zenithdistanz.									Höhe.				
	G	m	s			G	m	s		Klaftern.			Klaftern.
Iste Lage	01	11	50	log const 9,02118	z	99	20	75	i	0,5	log cot z' 8,10516	I	— 6,8
IIte Lage	199	53	00	log S = 3,23901	— c		1	82	— n	7,3	log S = 3,23901	II	22,1
2 z	198	41	50	log c = 2,26019	z'	99	18	93	— I	6,8	log II = 1,34417	Δh	15,3
z	99	20	75	— c = 182"							II, 221	h	293,9
												h'	309,2

h = 293,9 Kl. ist die Höhe der Station über der Meeresfläche.

Digitized by Google

Bei der Beobachtung des Höhenwinkels am Theodoliten gibt der Nonius einmal die Stelle n (Fig. 29.), das anderemal, bei umgewandtem Fernrohre, die Stelle n' an (IIte Lage). Beide Angaben von einander abgezogen, d. h. IIte Lage — Iste Lage, gibt die doppelte Zenithdistanz = 2 z.

Dieses zur Erläuterung der Rechnung in den vier ersten Columnen des obigen Formulars.

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Einige Lehren aus der Astronomie,

als Vorkenntnisse zu den folgenden Abschnitten.

Erstes Capitel.

Erscheinung des Weltgebäudes und künstliche Eintheilung der Himmelskugel.

§. 50.

Wenn wir in einer heiteren sternhellen Nacht das Himmelsgewölbe eine Zeit lang mit Aufmerksamkeit betrachten, so bemerken wir, dafs sich alle Gestirne von Osten nach Westen in gröfseren und kleineren concentrischen Bogen um einen unbeweglichen Punct zu drehen scheinen, ohne dafs sich hierbei die gegenseitige Stellung der Sterne gegen einander änderte. Am folgenden Abende findet man die Sterne um eine gleiche Stunde fast in eben denselben Standpuncten, und nimmt die nämlichen Erscheinungen wahr, wie am vorhergehenden Abende, so dafs sich also die gestirnte Himmelskugel in vier und zwanzig Stunden von Osten nach Westen herumzuwälzen scheint.

Die Umdrehungsaxe dieser Himmelskugel ist eine durch den erwähnten unbeweglichen Punct (den Nordpol der Weltkugel) und unser Auge gelegte gerade Linie, welche verlängert die Himmelskugel in einem zweiten unbeweglichen, nur auf der südlichen Halbkugel der Erde sichtbaren, Puncte trifft, den man den Südpol der Weltkugel nennt.

Digitized by Google

Die von den Sternen binnen 24 Stunden am Himmel beschriebenen Parallelkreise heifsen in der Kunstsprache der Astronomie Tagekreise. Den gröfsten derselben, welcher gleich weit von dem Nord- und Südpol entfernt ist, nennt man den Himmelsäquator.

Unter Horizont versteht man denjenigen gröfsten Kreis der Himmelskugel, welcher die sichtbare Hemisphäre des Himmels von der unsichtbaren trennt.*) Die Puncte, wo der Aequator den Horizont schneidet, heifsen der Ost- und Westpunct. Derjenige Punct des Himmels, welcher senkrecht über unserm Haupte liegt, wird Zenith, der entgegengesetzte Nadir genannt.

Gröfste Kreise, welche durch die beiden Weltpole geführt sind, und also den Aequator senkrecht durchschneiden, heifsen Declinations- oder Stundenkreise. Derjenige unter ihnen, der durch den Scheitelpunct (Zenith) des Beobachters gelegt ist, heifst der Meridian desselben. Den von dem Meridian und einem andern Stundenkreise eingeschlossenen Winkel nennt man Stundenwinkel. Steht ein Gestirn im Meridian, so sagt man: es culminirt.

Ein gröfster Kreis durch ein Gestirn und das Zenith hat den Namen Höhenkreis (Scheitelkreis, Verticalkreis). Der Winkel am Zenith zwischen dem Meridian und dem Scheitelkreise eines Gestirns ist das Azimuth dieses Gestirns. Sowohl die Azimuthe als die Stundenwinkel werden von Süd nach West u. s. f. bis zu 360° gezählt.

*) Es ist hierbei zu bemerken, dafs es für die meisten astronomischen Beobachtungen einerlei ist, ob man sich den Horizont als eine Ebene, welche die Erdkugel an der Stelle des Beobachters berührt, oder als eine mit der berührenden parallele, durch den Mittelpunct der Erde gehende Ebene vorstellen will, da der Durchmesser der Erde gegen die ungeheuere Entfernung der meisten Gestirne verschwindet.

Digitized by Google

Der Abstand eines Sterns von dem Aequator heifst die Declination des Sterns, die Ergänzung der Declination zu 90° ist die Poldistanz.

§. 51.

Doch nicht alle Himmelskörper behalten gegen die übrigen eine unveränderliche Stellung bei. Dieses sind, die Sonne, der Mond, die Planeten und die Cometen. Die unbeweglichen heifsen Fixsterne.

Der erstere dieser beweglichen Himmelskörper, die Sonne, scheint nebst der täglichen Bewegung von Ost nach West, die er mit allen übrigen Gestirnen gemein hat, noch in einer eignen Bewegung von West nach Ost in einem Kreise fortzurücken, welcher den Aequator in zwei, um 180 Grade von einander entfernten, Puncten schneidet. Dieser gröfste Kreis der scheinbaren Bahn der Sonne heifst die Ekliptik. Sie ist gegen den Aequator unter einem Winkel von ungefähr 23°, 28′ geneigt. Ihre Axe, d. h. die durch den Mittelpunct dieses Kreises auf seiner Ebene senkrechte Linie, trifft das Himmelsgewölbe in zwei Puncten, deren einer der Nordpol, der andere der Südpol der Ekliptik genannt wird. Gröfste Kreise, welche durch die Pole der Ekliptik gelegt sind, heifsen Breitenkreise. Die Durchschnittspuncte der Ekliptik mit dem Aequator heifsen Aequinoctialpuncte oder Puncte der Nachtgleichen. Derjenige dieser beiden Puncte, von welchen sich die Sonne in die nördliche Hemisphäre erhebt, heifst der Frühlingsnachtgleichepunct, der entgegengesetzte der Herbstnachtgleichepunct. Der Bogen des Aequators zwischen dem Frühlingspuncte und dem Declinationskreise eines Gestirns, ist die Rectascension des Gestirns und der Bogen der Ekliptik zwischen dem Früh-

Digitized by Google

lingspuncte und dem Breitenkreise eines Gestirns ist die **Länge** desselben. Rectascension und Länge werden in der Richtung von West nach Ost bis zu 360° gezählt.

Der Declinationskreis durch die Aequinoctialpuncte ist der **Colur der Nachtgleichen** und der von diesen um 90° in Rectascension und Länge entfernte Declinationskreis ist der **Colur der Solstitien.**

Den ganzen Umfang der Ekliptik theilt man seit den ältesten Zeiten in zwölf gleiche Theile, die sogenannten zwölf **himmlischen Zeichen.** Die Namen derselben sind in der Ordnung ihrer Reihenfolge von Westen nach Osten: Widder ♈; Stier ♉; Zwillinge ♊; Krebs ♋; Löwe ♌; Jungfrau ♍; Wage ♎; Scorpion ♏; Schütze ♐; Steinbock ♑; Wassermann ♒; Fische ♓ *). Jedes dieser Zeichen enthält 30 Grad.

§. 52.

Dafs die tägliche Bewegung des Himmels um die Weltaxe nur ein **Schein** ist, und dafs sich eigentlich blofs die **Erde** um ihre Axe dreht, bedarf als eine allgemein bekannte Sache, kaum der Erwähnung. Der einfacheren Darstellung wegen werden wir jedoch öfters die Ausdrücke gebrauchen, welche sich auf die Bewegung des Himmels um die im Mittelpuncte desselben ruhende Erde beziehen.

Eben so bekannt ist es, dafs die scheinbare jährliche Bewegung der Sonne durch die Ekliptik blofs durch Bewegung der Erde um die Sonne hervorgebracht wird.

---

*) Man hat die Zeichen des Thierkreises in folgende zwei Hexameter gebracht:

Sunt: Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Digitized by Google

Die Figur der Erdbahn ist übrigens nicht ganz die eines Kreises, sondern mehr die einer Ellipse, in deren einem Brennpunct die Sonne steht. Zu dieser Erfahrung sind wir durch die Beobachtung gelangt, dafs der Gesichtswinkel, unter welchem die Sonne in den verschiedenen Jahrszeiten erscheint, eine verschiedene Gröfse besitzt. Der veränderliche Abstand der Erde von der Sonne wird durch die Gleichung $2\,\varrho \sin \frac{1}{2}\,\alpha = \text{Diam.}$ bestimmt, wo ϱ den Radius vector und α den Gesichtswinkel bezeichnet, unter welchem der Sonnendurchmesser erscheint. Der Punct der Erdbahn, welcher der Sonne am nächsten ist, wo also ϱ am kleinsten und α am gröfsten ist, heifst das Perihelium oder Perigäum. Der entfernteste Standpunct der Erde von der Sonne heifst das Aphelium (Apogäum).

Ein anderer Erfahrungssatz ist, dafs die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Erde um die Sonne bewegt, an verschiedenen Stellen ihrer Bahn verschieden ist. Im Perihelium ist diese Geschwindigkeit am gröfsten, im Aphelium am kleinsten.

Zweites Capitel.

Von der Zeit.

§. 53.

Die Zeit ist nichts anderes als der Eindruck, welchen der Zwischenraum, den wir zwischen vergangenen und gegenwärtigen Dingen finden, auf uns macht. Zur Messung dieses Zwischenraums ist die gleichförmige Bewegung eines Körpers am passendsten, und die Theile der Linie, welche der Körper beschreibt, können als Maafs für die hierzu verwendete Zeit gebraucht werden.

Digitized by Google

Obgleich sich nun zwar die Sonne nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit von Westen nach Osten bewegt, und obgleich diese Bewegung nicht im Aequator vor sich geht, dessen Puncte allein unter denen aller gröfsten Kreise bei der täglichen Bewegung gleichförmig fortrücken, so ist diese Bewegung demungeachtet allgemein als Zeitmaafs angenommen, weil die Sonne durch ihre Rückkehr zum Meridian den Tag, durch ihre Rückkehr zum Aequinoctium das Jahr bestimmt.

Weil nun die wahre Sonne nicht dazu geeignet ist, die Zeit genau zu messen, so denkt man sich eine zweite, sogenannte mittlere, Sonne, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in demselben Zeitraume, welchen die wahre Sonne zum Durchschreiten der Ekliptik braucht, durch den Kreis des Aequators bewegt, und nennt die nach der Bewegung dieser fingirten Sonne bestimmte Zeit, die mittlere Sonnenzeit. Die Rectascensionen der fingirten Sonne werden dann der wirklichen bald voreilen, bald hinter ihr zurückbleiben, und während der ganzen Periode viermal mit derselben zusammenfallen.

Ein drittes Zeitmaafs wird von den Sternen genommen. Die Zwischenzeit zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen eines Sterns durch denselben Meridian bezeichnet genau die Dauer einer Umwälzung der Erde, und diese immer gleiche Dauer bietet ein unveränderliches Maafs der Zeit dar. Ein Sterntag ist die Zeit, welche zwischen zwei Culminationen des Frühlingsnachtgleichepunctes fällt.

Wenn Figur 30. MSS'VN den Aequator, MN den Meridian, S die wahre Sonne, S' die mittlere, und V den Frühlingsnachtgleichepunct vorstellt, so ist $\frac{MS}{15}$ = wahre

Digitized by Google

Zeit, $\frac{MS'}{15}$ = mittlere Zeit, $\frac{MV}{15}$ = Sternzeit. *)

§. 54.

Wir wollen nunmehr die Beziehung dieser drei verschiedenen Zeitmaafse zu einander angeben.

Denken wir uns den Sterntag und den mittleren Sonnentag in gleichem Augenblick beginnen, so wird bei dem Umlauf in der Richtung von M nach C Fig. 31. die fingirte Sonne vermöge ihrer eigenthümlichen Bewegung in entgegengesetzter Richtung noch um den Bogen MF von dem Meridian entfernt seyn, während der Aequinoctialpunct von Neuem culminirt, der letztere hingegen bereits den Bogen MS beschrieben haben, wenn F den Meridian erreicht

MF beträgt 58′ 58″ 38‴ = 3′, 55″ 54‴ in Zeit.
MS = 59′ 8″ 20‴ = 3′ 56″ 33‴ in Zeit.

Die Addition des Werthes MS zu 24 Stunden gibt die Dauer des mittleren Tages in Sternzeit = 24 St. 3′. 56″ 33‴. Die Subtraction des in Zeit umgesetzten Bogens MF von 24 Stunden, hingegen die Dauer eines Sterntages in mittlerer Zeit = 23 S. 56′ 4″ 6‴. Oder mit andern Worten:

24 mittlere Sonnenstunden = 24 St. 3′ 56″ 33‴ Sternzeit.
24 St. Sternzeit = 23 S. 56′ 4″ 6‴ mittlere Sonnenzeit.
1 St. mittlere Sonnenzeit = 1 St. 0′ 9″, 86 Sternzeit.
1 St. Sernzeit = 0 St. 59′ 50″, 17 mittlere Sonnenzeit.

Man hat hiernach folgende Tafel für die Reduction der Sternzeit auf mittlere Sonnenzeit berechnet.

---

*) Wenn man einen Bogen in Zeit verwandeln will, so mufs er durch 15 dividirt werden. Denn der Kreis enthält 360°, der Tag aber nur $\frac{360}{15}$ = 24 Stunden.

Digitized by Google

Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.	Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.	Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.
Stund.	Min. Sec.	Min.	Secunden.	Min.	Secunden.
1	0 9,8	1	0,2	31	5,1
2	0 19,6	2	0,3	32	5,2
3	0 29,5	3	0,5	33	5,4
4	0 39,3	4	0,7	34	5,6
		5	0,8	35	5,7
5	0 49,1	6	1,0	36	5,9
6	0 59,0	7	1,1	37	6,1
7	1 8,8	8	1,3	38	6,2
8	1 18,6	9	1,5	39	6,4
		10	1,6	40	6,5
9	1 28,5	11	1,8	41	6,7
10	1 38,3	12	2,0	42	6,9
11	1 48,1	13	2,1	43	7,0
12	1 58,0	14	2,3	44	7,2
		15	2,5	45	7,4
13	2 7,8	16	2,6	46	7,5
14	2 17,6	17	2,8	47	7,7
15	2 27,4	18	2,9	48	7,9
16	2 37,3	19	3,1	49	8,0
		20	3,3	50	8,2
17	2 47,1	21	3,4	51	8,3
18	2 56,9	22	3,6	52	8,5
19	3 6,8	23	3,8	53	8,7
20	3 16,6	24	3,9	54	8,8
		25	4,1	55	9,0
21	3 26,4	26	4,3	56	9,2
22	3 36,2	27	4,4	57	9,3
23	3 46,1	28	4,6	58	9,5
24	3 55,9	29	4,7	59	9,7
		30	4,9	60	9,8

Sternzeit.	Reduction auf mittl Sonnenz.	Sternzeit.	Reduction auf mittl. Sonnenz.
Secunden.	Secunden.	Secunden.	Secunden.
0	0,00	30	0,08
10	0,03	40	0,11
20	0,05	50	0,14
30	0,08	60	0,16

Digitized by Google

Beispiel.

Wie viel betragen 8 Stunden 14′ 36″, 0 Sternzeit in mittlerer Sonnenzeit?

	Reduction.	
8 Stunden	— 1′ . 18″,6	
14 Minuten	— 2,3	= — 1′ . 21″,0
36 Secunden	— 0,1	

Es sind also 8 Stunden 14 36″ Sternzeit = 8 St. 13′15″,0 mittlerer Sonnenzeit.

§. 55.

Der für jeden Augenblick sich ergebende Unterschied zwischen der wahren und mittleren Zeit heifst die Zeitgleichung. Da die mittlere Zeit immer demjenigen Theile des Supplementes der Rectascension der mittleren Sonne gleich ist, der sich zwischen ihr und dem Meridiane befindet, und die wahre Zeit eben diesem Theile bei der wahren Rectascension, so hat man nur nöthig, von dem gröfseren dieser beiden Werthe den kleineren abzuziehen und den Unterschied durch 15 zu dividiren, um die in Sternzeit ausgedrückte Zeitgleichung zu finden. In den astronomischen Ephemeriden findet sich übrigens die mittlere Zeit im wahren Mittage für alle Tage des Jahres angegeben.

Zwischen wahrer Sonnenzeit und Sternzeit herrscht eine sehr einfache Relation, und wir können, wenn wir eine Uhr und astronomische Tafeln besitzen, welche die geraden Aufsteigungen der Sonne für einen jeden Tag des Jahrs enthalten, sehr leicht von einer Zeitbestimmung auf die andere schliefsen. Der Zeitunterschied zwischen den Anfangsmomenten des Stern- und Sonnentags, d. h. zwischen den Culminationen des Aequinoctialpunctes und der Sonne, wird

Digitized by Google

nämlich durch die jedesmalige in Zeit umgesetzte Rectascension der Sonne gemessen, und es ist also Sternzeit — Sonnenzeit = AR. S. Ist die Uhr nach wahrer Sonnenzeit regulirt, so finden wir den Augenblick einer Beobachtung in Sternzeit, wenn wir die an der Uhr beobachtete wahre Sonnenzeit zu der in Zeit umgesetzten Rectascension der Sonne addiren. Geht die Uhr nach Sternzeit, so finden wir die wahre Sonnenzeit = Sternzeit — AR. S.

Die leicht zu vollziehende Reduction eines Zeitmaafses auf das andere läfst es völlig gleichgültig erscheinen, welches von ihnen man für die Bestimmung eines gewissen Augenblicks wählt. Durch unmittelbare Beobachtungen am Himmel gewinnt man übrigens entweder wahre Sonnenzeit oder Sternzeit.

§. 56.

Hätte man Uhren, welche mit absoluter Genauigkeit, und ohne je abzuweichen, entweder nach Sternzeit, oder nach mittlerer Sonnenzeit gingen, so würden die Zeitbestimmungen durch astronomische Beobachtungen unnöthig seyn. Da Jenes aber nicht der Fall ist, so mufs man sich der astronomischen Beobachtungen bedienen, um die Uhren von Zeit zu Zeit zu corrigiren.

Das allereinfachste und zugleich sicherste Mittel für diesen Zweck ist das Mittagsrohr (Passageinstrument) d. h. ein Fernrohr, welches sich auf einer horizontalen Axe in der Ebene des Meridians bewegt. Die Momente des Durchgangs der Sterne durch den im Brennpunct des Fernrohrs vertical gestellten Faden werden an der Uhr beobachtet, wo dann der Unterschied der beobachteten Uhrzeit von der bekannten Sternzeit der Culmination des Gestirns die Correction der Uhr gibt.

Digitized by Google

Wenn die Uhr nach Sternzeit geht, so ist die Correction der Uhr sofort = a — t, wo a die in Zeit umgesetzte Rectascension des Sterns für den Beobachtungstag*) und t die Uhrzeit der Beobachtung ist.

Geht aber die Uhr nach mittlerer Zeit, so muſs man die Sternzeit der Culmination, die immer = der Rectascension a ist, zuerst in die mittlere Zeit der Culmination = m verwandeln **), und es ist dann die Correction der Uhr = m — t.

Wenn man kein Passageinstrument besitzt, so bedient man sich, um die Correction der Uhr zu bestimmen, der Methode der correspondirenden Höhen, welche wesentlich darin besteht, daſs man mit Hülfe eines Theodoliten auf beiden Seiten des Meridians gleich groſse Höhen eines Gestirns miſst und die Beobachtungsmomente an der Uhr bemerkt. Da nun zu gleichen Höhen auch gleiche Stundenwinkel gehören, so wird die Mitte der beiden Beobachtungszeiten auch sofort die Uhrzeit der Culmination des Gestirns seyn. Hätte man z. B. von einem Gestirne, dessen scheinbare (von Präcession, Aberration und Nutation veränderte) Rectascension a = 5^h 40′ 10″ ist, zwei gleiche Höhen beobachtet, die erste vor der Culmination um 3^h, 17′, 20″ Uhrzeit, ***) die zweite nach der Culmination um 7^h, 26′, 30″, so ist

*) In den Sterncatalogen sind die Rectascensionen und Declinationen der Gestirne für eine bestimmte Epoche berechnet. Will man die Rectascension und Declination eines Sterns für eine andere Epoche wissen, so müssen die Präcession, Aberration und Nutation in Rechnung gezogen werden. Hiervon wird später ausführlich gehandelt werden.

**) Die hierzu erforderliche Rectascension der Sonne im Moment der Beobachtung nimmt man aus den Ephemeriden.

***) Es wird angenommen, daſs die Uhr nach Sternzeit geht.

Digitized by Google

$3^h, 17', 20''$
$7^h, 26', 30''$

$10^h, 43', 50''$

Mittel $= 5^h, 21', 55'' =$ Uhrzeit der Culmination. Die Uhr hatte also im Augenblick der Culmination $5^h, 21', 55''$ gezeigt. Eigentlich hätte sie aber zeigen müssen: $5^h, 40', 10''$, weil dieses $=$ a ist. Es ist also $5^h, 40', 10'' - 5^h, 21', 55'' = + 18', 15''$ die Correction der Uhr.

Um Beobachtungsfehler zu vermeiden, mufs man auf beiden Seiten des Meridians mehrere correspondirende Höhen nehmen, aus je zwei correspondirenden Höhen die Correction der Uhr berechnen, und aus allen diesen Werthen das Mittel nehmen.

Die Zeit läfst sich auch aus einer einzigen beobachteten Zenithdistanz*) finden, wenn die Poldistanz des Gestirns und die Polhöhe für den Beobachtungsort bekannt ist. In dem sphärischen Dreiecke, welches durch das Gestirn, das Zenith und den Weltpol gebildet wird, findet die Gleichung statt:

$$\cos . s = \frac{\cos z - \sin \varphi . \cos p}{\cos \varphi . \sin p}$$

wo φ die Polhöhe, s den Stundenwinkel, p die Poldistanz und z die Zenithdistanz bezeichnet.

Für Fixsterne mufs noch die Rectascension a derselben bekannt seyn, wo dann $(s + a)$ die gesuchte Sternzeit der Beobachtung gibt. Auch hier sind a und p die Rectascension und Poldistanz, wie sie durch Präcession, Aberration und Nutation bereits geändert sind.

*) Die Zenithdistanz eines Gestirns ist das Complement der Höhe desselben zu 90°.

Digitized by Google

Die beobachtete Zenithdistanz aber muſs zuerst von dem bekannten Fehler des Instruments befreit, und um die Refraction*) vermehrt werden.

Beispiel. Den 11. Oct. 1761 um $10^h\ 36'\ 25''$ Uhrzeit wurde in Alexandria beobachtet

die Zenithdistanz von α Tauri $61^h\ 27'\ 30''$
Fehler des Instrumentes = $\quad -\ 3'\ .\ 0''$

$61^h\ 24'\ .\ 30''$
Refraction . . . . . $1'\ .\ 44'',2$

$z = 61^h, 26', 14'', 2$

Der Ort des Sterns für diesen Tag ist $a = 4^h\ 22'\ 16'',35$ und $p = 73°, 59'\ 20'', 35$, und die Polhöhe $\varphi = 31°, 12'\ 13''$. Mit diesen Gröſsen gibt die vorhergehende Gleichung:

$s = 65°, 56, 13'', 93 = 19^h, 36', 15'', 074$
$a = \quad 4^h\ 22', 16'', 350$

Sternzeit der Beobachtung $= 23^h, 58', 31'', 424$

Hätte also z. B. eine nach Sternzeit gehende Uhr $23^h\ 58'\ 20''$ gezeigt, so wäre die Correction der Uhr $= +\ 11'', 424$. Da aber die Uhr nach mittlerer Zeit ging, so muſste die berechnete Sternzeit zuvor in mittlere Zeit verwandelt werden, ehe sie mit der beobachteten Uhrzeit verglichen werden konnte.

*) Hiervon später.

Digitized by Google

Drittes Capitel.

Bestimmung der scheinbaren Orte der Gestirne auf der Oberfläche des Himmels.

§. 57.

In dem ersten Capitel haben wir gesehen, dafs es drei verschiedene Arten gibt, um die Orte der Sterne am Himmelsgewölbe zu bestimmen. Es kann diefs nämlich geschehen

1) durch Declination und Rectascension;

2) durch Länge und Breite;

3) durch Höhe und Azimuth.

Ist die Lage eines Sterns auf die eine Art bestimmt, so ist es mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie sehr leicht, auch die Lage desselben auf eine der beiden andern Arten zu bestimmen.

Nehmen wir vorerst an, es sey uns die Polhöhe ϕ eines Orts, die Zenithdistanz z und das Azimuth α eines Gestirns für eine gegebene Zeit aus einer Beobachtung bekannt. Man suche den Stundenwinkel s, die Poldistanz p und die Rectascension a für dieselbe Zeit.

Es sey (Fig. 32.) N der Pol des Aequators, Z das Zenith, AR der Aequator, HT der Horizont, EK die Ekliptik, r der Frühlingsnachtgleichepunct, S ein Stern, Sb die Declination dieses Sterns, Winkel SZR das Azimuth, Winkel SNR der Stundenwinkel, NH die Polhöhe.

Man hat hier das sphärische Dreieck NZS, in welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Es ist nämlich $NZ = 90^0 - \phi$ und $ZS = z$ gegeben. Ebenso Winkel $NZS = 180^0 - \alpha$. Wir finden also die dritte Seite $NS = p$ ganz leicht durch die bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie

Digitized by Google

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos p - \cos(90 - \varphi) \cdot \cos z}{\sin(90 - \varphi) \sin z}, \text{ also}$$

$$\cos p = \sin \varphi \cdot \cos z - \cos \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin z$$

Den Stundenwinkel s finden wir sodann durch die Gleichung

$$\sin z : \sin s = \sin p : \sin(180^\circ - \alpha)$$

Um die Rectascension $a = br$ zu bestimmen, bemerken wir, dafs $\frac{RNr}{15} = \frac{rR}{15}$ = der bekannten Sternzeit der Beobachtung ist, welche wir durch t bezeichnen wollen. Dieses t ist aber $= a + s$, und da s bereits aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so findet man die Rectascension des Sterns durch die Gleichung $a = t - s$.

§. 58.

Eben so leicht finden wir aus der Rectascension a und der Poldistanz p eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik e die Länge λ und die Poldistanz π desselben in Beziehung auf die Ekliptik. Diese Aufgabe reducirt sich auf die Auflösung des sphärischen Dreiecks NSL in Fig. 33., wo S einen Stern vorstellt, NS = p, N = Pol des Aequators, L = Pol der Ekliptik, AQ der Aequator, EK die Ekliptik, rb = Rectascension, rc = rLc = Länge, Sb = Declination, Sc = Breite, SL = π, NL = e = EQ, weil LE = 90° und NQ = 90°. Da nun der Bogen LNEQ zugleich senkrecht auf der Ekliptik und auf dem Aequator steht, und diese beiden Kreise in 2 Puncten schneidet, die beide von dem Nachtgleichepunct r um 90° entfernt sind, so folgt, dafs, wenn man die Bögen Lr und Nr zieht, der Winkel rLN sowohl als der Winkel LNr ebenfalls 90° beträgt. Daher SLN = 90° − λ und ebenso ist SNL = 90° + a. In dem Dreieck LNS sind also wie vorhin zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt. Daher

Digitized by Google

$\cos \pi = \cos (90^\circ + a) \sin p \sin e + \cos p \cos e =$
$= - \sin a \,.\, \sin p \,.\, \sin e + \cos p \,.\, \cos e$

Berechnen wir einen Hülfswinkel ξ,

so dafs $tg\, \xi = \cos (90^\circ + a)\, tg\, p$

und substituiren wir statt $\cos (90^\circ + a) \sin p$ seinen Werth $\frac{\sin \xi \cos p}{\cos \xi}$ in obige Gleichung, so kömmt: $\cos \pi = \frac{\cos p \,.\, \cos (\xi - e)}{\cos \xi}$, welche Formel sich besser zur Logarithmenrechnung eignet, wie die obige. Endlich ist

$\sin \pi : \sin (90^\circ + a) = \sin p : \sin (90^\circ - \lambda)$
$= \sin p : \cos \lambda$, also $\cos \lambda = \frac{\sin (90^\circ + a) \sin p}{\sin \pi}$.

Viertes Capitel.

Von der Präcession.

§. 59.

Wenn wir die Lage eines Gestirns in Rectascension und Declination, oder in Länge und Breite mittels einer unmittelbaren Beobachtung am Himmel bestimmt haben, und beobachten nach einigen Jahren den Ort des nämlichen Gestirns, so werden wir finden, dafs die Rectascension, Declination, Breite und Länge nicht mehr dieselben sind, wie früher. Diese Verschiedenheit hat ihren Grund

1) in der Präcession der Aequinoctien,
2) in der Nutation und
3) in der Aberration des Lichts.

Jede dieser Erscheinungen wollen wir hier einzeln betrachten. Von den beiden ersteren derselben kann hier nur

Digitized by Google

das angegeben werden, was die Beobachtungen in Bezug auf dieselben gelehrt haben. Auf eine Erklärung ihrer physischen Ursachen, welche zu sehr verwickelten Rechnungen führen würde, können wir uns hier nicht einlassen. Nur das sey im Allgemeinen gesagt, dafs die Präcession und Nutation von der Anziehungskraft, welche Sonne und Mond auf die sphäroidisch gestaltete Erde äussern, herrühren. Zuvörderst wollen wir von der Präcession reden.

Diese besteht darin, dafs die Fixsterne gemeinschaftlich nach der Ordnung der Zeichen (gen Osten) vom Frühlings-äquinoctialpuncte wegzurücken scheinen, während dieser unbeweglich bleibt. Richtiger aber und einfacher ist die Vorstellung, wenn wir annehmen, dafs die Nachtgleichpuncte längs der Ekliptik mit gleicher Geschwindigkeit zurückweichen. Durch das Zurückweichen der Aequinoctialpuncte bewegen sich die Weltpole nach und nach um die Pole der Ekliptik, die man sich dabei als unveränderlich denken mufs. Zu einer ganzen solchen Umdrehung, während der alle Sterne zugleich einen scheinbaren Umlauf um die Pole der Ekliptik vollenden (grofses platonisches Jahr) sind etwa 25848 Jahre nöthig.

Diese Erscheinung wird defswegen die „Präcession" der Nachtgleichen genannt, weil die Sonne bei ihrem jährlichen scheinbaren Kreislaufe jedesmal einen der Aequinoctialpuncte früher als den nämlichen Fixstern wieder erreicht. Die Formel für die Präcession bilden wir auf folgende Weise:

Es sey (Fig. 34.) AA′ die Ekliptik, E der Pol derselben, BB′ der Aequator, P der Pol desselben, r der Durchschnittspunct des Widders. Bogen EP = Schiefe der Ekliptik = e. S sey ein Stern, SS′ die Breite desselben

Digitized by Google

$= \beta$, S'r die Länge des Sterns $= \lambda =$ Winkel S'Er; ST = Declination = D, Tr = Rectascension = Winkel TPr = A.

Nach Verlauf eines Jahres sey r nach r' und P nach p gerückt, wodurch die Länge des Gestirns um rr' = $d\lambda$ zunimmt. Die Breite dagegen bleibt ungeändert. Es ist $r'ES' = rES' + rEr' = \lambda + d\lambda$, also sin . r'ES' = sin $(\lambda + d\lambda)$ = cos S'Ep.

Reduciren wir den Bogen pS auf den Bogen PS, so dafs pS = qS. Es ist alsdann pS = PS — Pq. Es ist aber PS = 90° — D und Pq die durch die Präcession in der Declination verursachte Veränderung = dD, folglich: cos pS = cos [90 — (D + dD)] = sin (D + dD) Es ist ferner sin ES = cos β, cos ES = sin β.

Um Pq zu finden ist es nur nöthig, die beiden sphärischen Dreiecke SEp und SEP zu betrachten. Man hat aus ihnen

Cos pS = cos Ep . cos ES + cos pES . sin Ep . sin ES
cos PS = cos EP . cos ES + cos PES . sin PE . sin ES

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, und bemerkt man, dafs EP = Ep, so folgt:

Cos . pS — cos PS = sin ES . sin PE (cos pES — cos . PES)

oder

$$\sin(D + dD) - \sin D = \sin e \cdot \cos\beta \left[\sin(\lambda + d\lambda) - \sin\lambda\right]$$

Es ist aber bekanntlich im Allgemeinen

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$$

Daher

$$2 \sin \frac{D + dD - D}{2} \cdot \cos \frac{D + dD + D}{2}$$

$$= \sin e \cdot \cos\beta \left[2 \sin \frac{\lambda + d\lambda - \lambda}{2} \cdot \cos \frac{\lambda + d\lambda + \lambda}{2} \right];$$

Digitized by Google

$$\sin \frac{dD}{2} \cdot \cos\left(D + \tfrac{1}{2} dD\right) = \sin e \cdot \cos \beta \sin \frac{d\lambda}{2} \cdot \cos\left(\lambda + \tfrac{1}{2} d\lambda\right),$$

woraus endlich

$$\sin \tfrac{1}{2} dD = \frac{\sin e \cdot \cos \beta \cdot \sin \tfrac{1}{2} d\lambda \cdot \cos\left(\lambda + \tfrac{1}{2} d\lambda\right)}{\cos\left(D + \tfrac{1}{2} dD\right)} \quad (I.)$$

Dieses ist die Formel für die Veränderung, welche durch die Präcession der Nachtgleichen in der Declination hervorgebracht wird. Da diese Formel von eben der Präcession, welche man sucht, abhängt, so rechne man, wenn man diese noch nicht beiläufig kennt, zuerst blofs mit der unverbesserten Declination, und wiederhole dann die Rechnung mit der so gefundenen Präcession.

§. 60.

Suchen wir nun die Formel für die Aenderung in der Rectascension. In dem Dreiecke EPS ist, wie die sphärische Trigonometrie lehrt:

$$\cos E \cdot \cos EP + \cot P \cdot \sin E = \cot ES \cdot \sin EP$$

oder

$$\sin E = \cot ES \cdot \sin EP \cdot \operatorname{tg} P - \cos E \cdot \cos EP \cdot \operatorname{tg} P$$

oder

$$\operatorname{tg} P = \frac{\sin E}{\sin PE \cdot \cot \cdot ES - \cos PE \cdot \cos E}$$

Es ist aber $P = 90° + A$, also $\operatorname{tg} P = \operatorname{tg}(90° + A) = -\cot A$, $\sin E = \cos \lambda$, $\cot ES = \operatorname{tg} \beta$, $\cos E = \sin \lambda$, $\sin PE = \sin e$. Folglich:

$$+ \cot A = \frac{-\cos \lambda}{\sin e \cdot \operatorname{tg} \beta - \cos e \cdot \sin \lambda};$$

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\sin e \cdot \operatorname{tg} \beta - \cos e \cdot \sin \lambda}{\cos \lambda};$$

$$\operatorname{tg} A = \cos e \cdot \operatorname{tg} \lambda - \frac{\sin e \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda};$$

Digitized by Google

Auf gleiche Weise erhält man aus dem sphärischen Dreiecke EpS, die Gleichung

$$\text{tg } A' = \cos e \,.\, \text{tg } (\lambda + d\lambda) - \frac{\sin e \,.\, \text{tg } \beta}{\cos (\lambda + d\lambda)},$$

wo wir durch A' die zweite Rectascension des Sterns, oder den Winkel r'pΣ = Bogen r'Σ bezeichnen. Ziehen wir die vorletzte Gleichung von der letzten ab, so folgt:

$$\text{tg } A' - \text{tg } A = \cos e \,.\, \text{tg } (\lambda + d\lambda) - \frac{\sin e \,.\, \text{tg } \beta}{\cos (\lambda + d\lambda)} - \cos e \,.\, \text{tg } \lambda + \frac{\sin e \,.\, \text{tg } \beta}{\cos \lambda}$$

$$\text{tg } A' - \text{tg } A = \cos e \,[\text{tg } (\lambda + d\lambda) - \text{tg } \lambda] + \sin e \,\text{tg } \beta \left(\frac{1}{\cos \lambda} - \frac{1}{\cos (\lambda + d\lambda)}\right)$$

$$= \cos e \,[\text{tg } (\lambda + d\lambda) - \text{tg } \lambda] + \sin e \,.\, \text{tg } \beta \left(\frac{\cos (\lambda + d\lambda) - \cos \lambda}{\cos \lambda \,.\, \cos (\lambda + d\lambda)}\right)$$

Es ist aber $\text{tg } A' - \text{tg } A = \frac{\sin A'}{\cos A'} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\sin A' \,.\, \cos A - \sin A \,.\, \cos A'}{\cos A' \,.\, \cos A} = \frac{\sin (A' - A)}{\cos A' \,.\, \cos A},$$

und ebenso ist

$$\text{tg } (\lambda + d\lambda) - \text{tg } \lambda = \frac{\sin (\lambda + d\lambda - \lambda)}{\cos (\lambda + d\lambda) \cos \lambda}$$

$$= \frac{\sin \,.\, d\lambda}{\cos (\lambda + d\lambda) \cos \lambda}$$

Ferner ist:

$$\cos (\lambda + d\lambda) - \cos \lambda = 2 \sin \frac{\lambda + \lambda + d\lambda}{2} \sin \frac{\lambda - \lambda - d\lambda}{2}$$

$$= 2 \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right) \sin \left(-\frac{d\lambda}{2}\right) = -2 \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right) \sin \frac{d\lambda}{2}$$

Wir erhalten also nach gehöriger Substitution:

Digitized by Google

$$\frac{\sin (A' - A)}{\cos A' \cdot \cos A} = \cos e \left[\frac{\sin d\lambda}{\cos (\lambda + d\lambda) \cos \lambda}\right]$$

$$+ \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{- 2 \cdot \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right) \sin \frac{d\lambda}{2}}{\cos (\lambda + d\lambda) \cos \lambda}$$

$$= \frac{\cos e \cdot \sin d\lambda - 2 \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right) \cdot \sin \frac{d\lambda}{2}}{\cos (\lambda + d\lambda) \cdot \cos \lambda}$$

Da nun im Allgemeinen $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, so ist $\sin \cdot d\lambda = 2 \sin \frac{1}{2} d\lambda \cdot \cos \frac{1}{2} d\lambda$. Durch Substitution dieses Werthes erhalten wir $\frac{\sin (A' - A)}{\cos A' \cdot \cos A}$

$$= \frac{\cos e \cdot 2 \cdot \sin \frac{1}{2} d\lambda \cdot \cos \frac{1}{2} d\lambda - 2 \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right) \sin \frac{d\lambda}{2}}{\cos (\lambda + d\lambda) \cdot \cos \lambda}$$

oder

$$\sin (A' - A) = \sin \cdot dA = \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2} d\lambda \cdot \cos A' \cdot \cos A}{\cos (\lambda + d\lambda) \cdot \cos \lambda}$$

$$\left(\cos e \cdot \cos \tfrac{1}{2} d\lambda - \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \left(\lambda + \frac{d\lambda}{2}\right)\right)$$

Es findet aber bei dem Dreiecke EPS die Proportion statt:

$$\sin EPS : \sin ES = \sin SEP : \sin PS,$$

oder

$$\cos A : \cos \beta = \cos \lambda : \cos D,$$

und ebenso in dem Dreiecke EpS

$$\sin EpS : \sin ES = \sin SEp : \sin pS$$

d. h.

$$\cos A' : \cos \beta = \cos (\lambda + d\lambda) : \cos (D + dD)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\cos A \cdot \cos A'}{\cos \lambda \cdot \cos (\lambda + d\lambda)} = \frac{\cos \beta^2}{\cos D \cdot \cos (D + dD)}$$

Digitized by Google

Durch Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung kömmt endlich:

$$\sin dA = \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2} d\lambda \cdot \cos \beta^2}{\cos D \cdot \cos (D + dD)}$$

$$[\cos e \cdot \cos \tfrac{1}{2} d\lambda - \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda + \tfrac{1}{2} d\lambda)] \text{ (II.) *)}$$

§. 61.

Die in den Formeln (I.) und (II.) vorkommende Gröfse $d\lambda$ ist, wie schon oben angegeben worden, die durch die Verrückung der Nachtgleichen während eines Jahrs bewirkte Vergröfserung der Länge eines Gestirns. Aus vielfältigen Beobachtungen hat man gefunden, dafs dieses $d\lambda = 50'',39$ ist. Will man also die Präcession in Declination und Rectascension für n Jahre haben, so müssen wir in den Formeln I. und II. statt $d\lambda$ überall setzen $n \cdot d\lambda = n \cdot 50'', 39$, und ebenso $n \cdot dD$ statt dD. Es ist demnach

$$\sin \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot dD = \frac{\sin e \cdot \cos \beta \cdot \sin \tfrac{1}{2} n \cdot 50'',39 \cdot \cos (\lambda + \tfrac{1}{2} n \cdot 50'',39)}{\cos (D + \tfrac{1}{2} n \cdot dD)}$$

und

$$\sin n dA = \frac{2 \cdot \sin \tfrac{1}{2} n \cdot 50'', 39 \cdot \cos \beta^2}{\cos D \cdot \cos (D + n dD)}$$

$$[\cos e \cdot \cos \tfrac{1}{2} n \cdot 50'', 39 - \sin e \cdot \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda + \tfrac{1}{2} n \cdot 50'',39)]$$

Von dem gefundenen Werthe von $n.dA$ mufs übrigens noch die kleine Gröfse $n.0'', 2017$ abgezogen werden, wegen einer sehr langsamen auf dem Aequator und zwar von Westen nach Osten erfolgenden Bewegung des Frühlingspunctes.

Die Schiefe der Ekliptik (e) ist nicht constant. Man hat nämlich gefunden, dafs sie allmählig abnimmt. Im An-

*) Vergl. Astronomie théorique et pratique par M. Delambre. Tome troisième pag. 188.

Digitized by Google

fange des Jahres 1750 war sie = 23° 28′ 18″. In 1750 + n Jahren ist sie e = 23° 28′ 18″. — 0′, 44 . n. Es ist also z. B. die Schiefe der Ekliptik im Jahre 1810 = 23°, 28′ 18″. — (0″,44) 60 = 23°, 27′ 51″, 6.

Wenn wir also mittels der Formeln (I.) und (II.) die Ortsveränderung eines Gestirns für eine Reihe von Jahren bestimmen wollen, so müssen wir, um diese Abnahme der Schiefe in Rechnung zu ziehen, uns in obigen Formeln immer blofs der Schiefe des mittleren Jahres bedienen.

§. 62.

Beispiel.

Man sucht die Präcession des Polarsterns vom 1. Jan. 1804 bis zum 1. Januar 1815.

Im Jahr 1804 ist die Rectascension des Polarsterns = 13° 20′ 12″, 3, die Declination = 88° 15′ 43″, 0, die Länge = 85° 49′ 34″, 7, die Breite = 66°, 4′, 39″, 2, e für 1810 = 23°, 27′ 51″, 6, n = 11; ½ n dλ = 4′ 37″, 13; λ + ½ n . dλ = 85° 54′ 11″, 83.

Berechnung der Präcession in der Declination.

log sin 0° 4′ 37″, 13	= 7,12826
log sin 23°, 27′, 52″	= 9,60008
log cos 66°, 4′, 39″	= 9,60804
log . cos 85, 54, 12	= 8,85394
comp . log . cos . 88, 15, 43	= 1,51813
log sin ½ n d D	= 6,70845
½ n . d D	= 1′, 45″, 4

Wiederholt man die Rechnung mit D + ½ n . d D = 88° 17′ 29″ so findet man: ½ n . d D = 1′ 47″, 2. Die Präcession in der Declination ist also in 11 Jahren = 3′, 34″, 4.

Digitized by Google

Berechnung der Präcession in der Rectascension.

log 2	= 0,0103
log sin ½ n dλ	= 7,12826
log cos β^2	= 9,21608
compl. log cos (D + n dD)	= 1,53328
compl. log cos D	= 1,51813
log I	= 9,69678

log cos e	= 9,96252
log cos ½ n dλ	= 0,00000
log II	= 9,96252

log . sin e	= 9,60008
log . tg β	= 0,35300
log sin (λ + ½ n . dλ)	= 9,99889
log III	= 9,95197
II	= 0,91731
III	= 0,89529
II — III	= 0,02202
log (II — III)	= 8,34270
log I	= 9,69677
log sin (ndA + n . 0,2017)	= 8,03947

ndA + 2″, 219 = 37′ 38″, 8

Es ist also

Präcession des Polarsterns von 1804 bis 1815 = + 37′ 36″, 6

Rectascens. dieses Gestirns für den 1. Jan. 1804 = 13°. 20′ 12″, 3

Rectascension den 1. Jan. 1815 = 13°, 57′ 48″, 9

Digitized by Google

§. 63.

Schliefslich wird hier bemerkt, dafs in fast allen Sternverzeichnissen aufser der für einen gewissen Zeitpunct berechneten Rectascension und Poldistanz eines jeden Sterns auch die durch die Präcession der Nachtgleichen bewirkte jährliche Aenderung in Rectascension und Poldistanz angegeben ist. Beispielshalber möge hier ein kleines Verzeichnifs der bedeutendsten Fixsterne seine Stelle finden.

Namen der Sterne	Rectascension in Bogen.			Polardistanz.		
	Am 1. Januar 1820.		Jährliche Aenderung.	Am 1. Januar. 1820.		Jährliche Aenderung.
	G. M. S.		Sec.	G. M. S.		Sec.
γ Pegasus.	0 59 42		+ 46,2	75 49 0		— 20,20
α Cassiopeja.	7 35 18		49,6	34 27 4		18,80
Polarstern.	14 15 31		221,1	1 39 5		19,45
α Widder.	29 15 45		50,2	67 23 27		17,40
α Wallfisch.	43 2 15		46,8	86 37 18		14,75
α Perseus.	47 52 65		63,0	40 47 18		13,50
Aldebaran.	66 24 4		50,1	73 51 43		7,95
Capella.	75 51 9		66,1	44 11 51		4,57
Rigel.	76 28 24		43,2	98 25 0		4,92
β Stier.	78 43 51		56,7	61 33 19		3,83
α Orion.	86 21 28		48,7	82 38 8		1,37
Sirius.	99 18 13		39,1	106 28 36		+ 4,36
Castor.	110 46 31		57,7	57 43 39		7,96
Procyon.	112 28 10		47,2	84 19 19		8,54
Pollux.	113 34 22		55,3	61 32 55		8,00
α Hydra.	139 41 9		44,2	97 52 57		15,19
Regulus.	149 56 40		48,1	77 9 24		17,33
α Gr. Bär.	163 8 0		57,4	27 16 45		19,30
β Löwe.	174 58 4		46,0	74 25 18		20,04
β Jungfrau.	175 19 51		46,8	97 13 15.		20,00
γ Gr. Bär.	176 4 45		48,0	35 18 19		20,00
Spica.	198 55 52		47,1	100 13 3		18,95
η Gr. Bär.	205 6 36		35,7	39 47 4		18,20
Arcturus.	211 51 51		40,9	69 52 33		19,99
1 α Wage.	220 14 27		49,3	105 14 26		15,20
2 α Wage.	220 14 7		49,3	105 17 10		15,20

Digitized by Google

Namen der Sterne.	Rectascension in Bogen. Am 1. Januar 1820. G. M. S.	Jährliche Aenderung. Sec.	Polardistanz. Am 1. Januar 1820. G. M. S.	Jährliche Aenderung. Sec.
β Kl. Bär.	222 50 6	4,8	15 6 31	14,70
α Krone.	231 46 4	35,2	62 40 23	12,49
α Schlange.	233 51 10	44,1	82 0 3	11,73
Antares.	244 35 48	54,9	116 1 19	8,62
α Herkules.	256 36 42	40,9	75 23 47	4,48
α Ophiuchus.	261 38 48	41,5	77 18 2	3,10
γ Drache.	268 6 28	20,7	38 29 9	0,70
Wega.	277 42 43	30,4	51 22 40	3,00
γ Adler.	294 25 34	49,5	79 49 2	8,38
Altair.	295 30 1	43,9	18 35 37	9,06
β Adler.	296 37 6	44,2	84 2 4	8,57
1 α Steinbock.	301 54 58	49,9	103 3 21	10,80
2 α Steinbock.	302 0 55	49,9	103 5 37	10,80
Deneb.	308 49 31	30,6	45 21 30	12,63
α Cepheus.	318 34 10	21,3	28 10 27	14,90
β Cepheus.	321 34 30	12,1	20 18 40	15,70
α Wassermann.	329 8 4	46,3	91 11 21	17,37
Fümelhaut.	341 55 15	50,1	120 34 26	19,10
α Pegasus.	343 57 3	44,7	75 45 39	19,43
α Andromeda.	359 46 36	46,2	61 54 13	19,99

Anmerkung.

Da die Richtung der Bewegung der Nachtgleichepuncte auf der Ekliptik der jährlichen Bewegung der Sonne entgegengesetzt ist, so wird die Sonne bei ihrem jährlichen Kreislaufe den nämlichen Aequinoctialpunct immer etwas früher erreichen, ehe sie volle 360° in der Ekliptik durchlaufen hat. Hierdurch entsteht der Unterschied zwischen dem siderischen und tropischen Jahre. Unter ersterem versteht man nämlich die Zeit, welche verfließt, bis die Sonne wieder zu dem nämlichen Fixsterne zurückkehrt. Dieser Zeitraum beträgt 365 T. 6 St. 9′ 11″, Unter dem tropischen Jahr dagegen versteht man die Zeit, welche die Sonne braucht, um zu dem nämlichen Aequinoctium zurückzukehren. Es sind hierzu 365 T. 5 St. 48′, 48″ erforderlich.

Digitized by Google

Fünftes Capitel.

Von der Aberration.

§. 64.

Was man unter der Aberration des Lichts zu verstehen habe, läfst sich wohl am besten auf folgende Art versinnlichen.

Auf dem Flusse AB (Fig. 35.) bewege sich ein Schiff aehf nach der Richtung B mit der Geschwindigkeit t. Von dem festen Puncte C aus werde eine Kanonenkugel nach dem Schiffe abgeschossen. Wenn das Schiff ruhte, so würde die Kugel in c″ eintreffen. Da aber das Schiff in der Zeit, während die Kanonenkugel den Raum c′c″ durcheilt, eine Bewegung von der Gröfse dc″ nach B zu macht, so wird die Kugel nicht in c″ sondern in d eintreffen, und zwar unter dem Winkel c′da. Das Loch, welches sie in d schlägt, wird so gestaltet seyn, als ob sie von dem Puncte γ gekommen wäre.

Denken wir uns nun statt der Kanonenkugel einen von einem Gestirn kommenden Lichtpunct, statt des Schiffes ein auf einem Puncte der Erde nach jenem Gestirn gerichtetes Fernrohr, ef stelle das Objectivglas, ab das Ocularglas vor, so ist der Winkel $Cc'\gamma$ die Aberration des Lichts. Dieser Winkel beträgt, wie man aus vielen Beobachtungen gefunden hat, 20″,448.

Es versteht sich übrigens von selbst, dafs man sich auch das Fernrohr mit seinen beiden Gläsern wegdenken kann; die Sache wird immer dieselbe bleiben. Dafs Dieses richtig ist, ergibt sich, wenn man sich die Fläche ef bis an das betreffende Gestirn selbst gerückt denkt. Die vorhergehende Figur verwandelt sich dann in das Parallelogramm $dcc''\gamma'$ (Fig. 36.), dessen 4 Puncte immer in einer Ebene liegen. Es

Digitized by Google

stellt hier dc″ das Stück der Erdbahn vor, welches von der Erde in der nämlichen Zeit durchlaufen wird, während das Licht den Weg cc″ zurücklegt.

c ist der wahre Ort des Gestirns, γ′ der scheinbare, cγ′ ist ein Bogen am Himmelsgewölbe und = 20″, 448. Diese Gröfse wollen wir künftig durch das deutsche 𝔄 bezeichnen.

Es ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dafs die Aberration nur von dem Verhältnifs der beiderseitigen Geschwindigkeiten, der Erde und des Lichts, (oder von dem Verhältnifs der Entfernungen dc″ und cc″ zu einander) abhängt. Wäre die Geschwindigkeit l des Lichts gegen die Geschwindigkeit t der Bewegung der Erde unendlich grofs, so würde keine Aberration statt finden. Die Geschwindigkeit des Lichts verhält sich aber zu der der Erde wie 1 : 0,0000991372. Es ist also c″d : c″c = t : l oder $c''d = cc'' \cdot \frac{t}{l} =$ cc″ . 0,0000991372. Drücken wir den Coefficienten von cc″ in Bogensecunden aus, d. h. dividiren wir ihn durch sin 1″, so folgt: c″d = cc″ . 20′, 448 = cc″ . 𝔄 = cγ′.

§. 65.

Es sey nun (Fig. 37.) L = Gr die Länge der Sonne, λ = Fr die wahre Länge, β die Breite und r die Entfernung eines Sterns von der Erde. Bestimmt man die Lage des wahren Ortes des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde durch drei rechtwinklige Coordinaten, x, y, z, wo x in der Linie liegt, welche den Mittelpunct der Sonne und den Mittelpunct der Erde verbindet, und wo x und y in der Ebene der Ekliptik liegen, so ist

Digitized by Google

$$z = r \cdot \sin \beta$$
$$mn = r \cdot \cos \beta$$
$$y = r \cdot \cos \beta \cdot \sin (\lambda - L)$$
$$x = r \cdot \cos \beta \cdot \cos (\lambda - L)$$

Bezeichnet man dieselben Gröfsen für den scheinbaren Ort des Gestirns durch x', r', β' u. s. w., so ist ebenso:

$$x' = r' \cos \beta' \cdot \cos (\lambda' - L)$$
$$y' = r' \cdot \cos \beta' \sin (\lambda' - L)$$
$$z' = r' \cdot \sin \beta'$$

Errichtet man an dem wahren Orte des Gestirns in der durch diesen wahren Ort und die Tangente EB der Sonnenbahn gelegten Ebene eine gerade Linie $Sb = 120'', 448 \cdot r$*), welche parallel mit dieser Tangente ist, so wird der Endpunct b dieser geraden Linie den scheinbaren Ort des Gestirns bezeichnen. Da aber die Tangente des Kreises auf dem Halbmesser desselben senkrecht steht, so ist die Tangente der Sonnenbahn auf der Axe der x senkrecht, d. h. die Tangente, also auch die Linie Sb, ist mit der Axe der y parallel, daher $y' = y - Sb$. Die beiden andern Coordinaten sind offenbar dieselben wie x und z.

Wenn wir daher den Winkel FnG durch α bezeichnen, so ist $tg\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y' + Sb}{x'}$, und $tg\,\beta = \frac{z}{mn}$

$$= \frac{z}{x \cdot \sec (\lambda - L)} = \frac{z}{x} \cos (\lambda - L);$$

$$tg\,\beta = \frac{z'}{x'} \cos (\lambda - L). \quad \text{(I.)}$$

Ferner ist: $\frac{y'}{x'} + \frac{Sb}{x'} = tg\,(\lambda - L) = tg\,(\lambda' - L)$

$$+ \frac{\mathfrak{A} \cdot r}{r \cdot \cos \beta' \cos (\lambda' - L)} \quad \text{(II.)}$$

*) In der Fig. 36. hiefs $Sb = c\gamma' = dc'' = cc'' \cdot \mathfrak{A}$.

Digitized by Google

Ebenso ist:

$$\text{tg } \beta' = \frac{z'}{x'} \cos (\lambda' - L) \quad \text{(III.)}$$

Dividiren wir die Gleichung I. durch die Gleichung III., so kömmt:

$$\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \beta'} = \frac{\cos (\lambda - L)}{\cos (\lambda' - L)}$$

oder

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \beta' \frac{\cos (\lambda - L)}{\cos (\lambda' - L)} \quad \text{(IV.)}$$

§. 66.

Die Gleichungen II. und IV. dienen zur Bestimmung der wahren Länge und Breite des Gestirns. Man kann aus ihnen auf folgende Art die durch die Aberration des Lichts bewirkte Aenderung in der wahren Breite und Länge des Gestirns berechnen, d. h. die Gröfsen $d\beta$ und $d\lambda$.

Es ist erstens:

$$\text{tg } (\lambda - L) = \text{tg } (\lambda' - L) + \frac{\mathfrak{A}}{\cos \beta' \cos (\lambda' - L)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 (\lambda - L)} - 1},$$

und zweitens folgt aus IV:

$$\cos^2 (\lambda - L) = \frac{\text{tg}^2 \beta \cdot \cos^2 (\lambda' - L)}{\text{tg}^2 \beta'}.$$

Substituiren wir den Werth von $\cos^2 (\lambda - L)$ in die vorletzte Gleichung, so folgt:

$$\sqrt{\frac{\text{tg}^2 \beta'}{\text{tg}^2 \beta \cdot \cos^2 (\lambda' - L)}} - 1 = \text{tg } (\lambda' - L) + \frac{\mathfrak{A}}{\cos \beta' \cdot \cos (\lambda' - L)};$$

$$\frac{\text{tg}^2 \beta'}{\text{tg}^2 \beta \cdot \cos^2 (\lambda' - L)} - 1 = \text{tg}^2 (\lambda' - L) + 2 \text{tg } (\lambda' - L) \cdot$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\cos \beta' \cdot \cos (\lambda' - L)} + \frac{\mathfrak{A}^2}{\cos^2 \beta' \cdot \cos^2 (\lambda' - L)}$$

Digitized by Google

Den letzten Theilsatz können wir vernachlässigen, da $\mathfrak{A}^2$ eine sehr kleine Gröfse ist. Daher

$$\frac{\operatorname{tg}^2\beta'}{\operatorname{tg}^2\beta} - \cos^2(\lambda' - L) = \sin^2(\lambda' - L) + 2\,\frac{\sin(\lambda' - L)\,\mathfrak{A}}{\cos\beta'};$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\beta'}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1 + \frac{2\sin(\lambda' - L)\,.\,\mathfrak{A}}{\cos\beta'};$$

$$\frac{\sin^2\beta'}{\cos^2\beta'}\,.\,\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = 1 + 2\,\frac{\sin(\lambda' - L)\,\mathfrak{A}}{\cos\beta'};$$

$$\sin^2\beta'.\cos^2\beta = \cos^2\beta'\sin^2\beta + \frac{2\cos^2\beta'.\sin^2\beta.\sin(\lambda' - L)\,\mathfrak{A}}{\cos\beta'};$$

$$\sin^2\beta'.\cos^2\beta - \cos^2\beta'.\sin^2\beta = 2.\cos\beta'.\sin^2\beta.\sin(\lambda' - L)\,\mathfrak{A};$$

oder

$$(\sin\beta'.\cos\beta + \cos\beta'.\sin\beta)(\sin\beta'.\cos\beta - \cos\beta'.\sin\beta) = 2.\cos\beta'.\sin^2\beta.\sin(\lambda' - L).\mathfrak{A};$$

$$\sin(\beta' + \beta)\sin(\beta' - \beta) = 2.\cos\beta'\sin^2\beta.\sin(\lambda' - L).\mathfrak{A};$$

oder näherungsweise:

$$\sin(\beta' + \beta').\sin(\beta' - \beta) = 2.\cos\beta'\sin^2\beta'\sin(\lambda' - L)\,\mathfrak{A};$$

$$\sin 2\beta'.\sin(\beta' - \beta) = 2.\cos\beta'\sin\beta'\sin\beta'.\sin(\lambda' - L).\mathfrak{A};$$

$$2\sin\beta'.\cos\beta'(\beta' - \beta) = 2.\cos\beta'.\sin\beta'.\sin\beta'.\sin(\lambda' - L).\mathfrak{A};$$

$$\beta' - \beta = \mathrm{d}\beta = \sin\beta'.\sin(\lambda' - L).\mathfrak{A}.$$

Es ist aber $\lambda' - L = -(L - \lambda')$ und im Allgemeinen: $\sin -x = -\sin x$, daher

(A.) $\mathrm{d}\beta = -\sin\beta'\sin(L - \lambda')\,\mathfrak{A}$, oder $= -\sin\beta\,.\sin(L - \lambda)\,\mathfrak{A}$.

§. 67.

Suchen wir nun auch eine Formel für die Gröfse $\mathrm{d}\lambda$ zu bilden. Es ist:

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = \operatorname{tg}(\lambda' - L) + \frac{\mathfrak{A}}{\cos\beta'\,.\,\cos(\lambda' - L)}.$$

Setzen wir defshalb

$$\frac{\sin(\lambda - L)}{\cos(\lambda - L)} = \frac{\sin(\lambda' - L)}{\cos(\lambda' - L)} + \frac{\mathfrak{A}}{\cos\beta'\,.\,\cos(\lambda' - L)}$$

Digitized by Google

$$\sin(\lambda - L) \cdot \cos(\lambda' - L) = \sin(\lambda' - L) \cos(\lambda - L) + \frac{\cos(\lambda - L)\, \mathfrak{A}.}{\cos \beta'};$$

$$\sin(\lambda' - L) \cos(\lambda - L) - \sin(\lambda - L) \cdot \cos(\lambda' - L) = -\frac{\cos(\lambda - L)}{\cos \beta'} \cdot \mathfrak{A}.$$

$$\sin[(\lambda' - L) - (\lambda - L)] = \sin(\lambda' - \lambda) = -\mathfrak{A} \frac{\cos(\lambda - L)}{\cos \beta}$$ (näherungsweise.)

Es ist aber im Allgemeinen $\cos - x = \cos x$
und $\lambda - L = -(L - \lambda)$ also $\cos(\lambda - L) = \cos(L - \lambda)$
daher

$$\sin(\lambda' - \lambda) = (\lambda' - \lambda) = d\lambda = -\mathfrak{A} \cdot \frac{\cos(L - \lambda)}{\cos \beta}.$$ (B.)

Die Formeln A und B drücken also die durch die Aberration des Lichts bewirkte Aenderung in der wahren Breite und Länge der Gestirne aus.

§. 68.

Bilden wir nun auch die Formel für die durch die Aberration hervorgebrachte Aenderung in der Rectascension und Declination.

Bemerken wir zu diesem Behufe vorerst, dafs in dem Dreieck LNS (Fig. 33.)
$\sin(90° + a) : \sin 90° - \beta) = \sin(90° - \lambda) : \sin(90 - \delta)$
oder $\cos a : \cos \beta = \cos \lambda : \cos \delta$, *) (I.)

---

*) Hieraus folgt:

$$\cos a = \frac{\cos \lambda \cdot \cos \beta}{\cos \delta};$$

$$\cos \beta = \frac{\cos a \cdot \cos \delta}{\cos \lambda};$$

$$\cos \lambda = \frac{\cos a \cdot \cos \delta}{\cos \beta}$$

Digitized by Google

wo a = Rectascension,
β = Breite,
λ = Länge,
δ = Declination ist.

Es ist ferner:

$$\cos(90^\circ + a)\cos e + \cot(90^\circ - \lambda)\sin(90 + a) = \cot(90^\circ - \delta)\sin e;$$

$$-\sin a \cdot \cos e + \operatorname{tg}\lambda \cdot \cos a = \operatorname{tg}\delta \cdot \sin e;$$

$$\operatorname{tg}\lambda \cdot \cos a = \operatorname{tg}\delta \cdot \sin e + \sin a \cos e$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\delta \cdot \sin e + \sin a \cdot \cos e}{\cos a} \quad \text{(II.)}$$

Es ist ferner:

$$\cos(90^\circ + a)\sin(90 - \delta)\sin e = \cos(90 - \beta) - \cos(90 - \delta)\cos e;$$

$$-\sin a \cdot \cos\delta \cdot \sin e = \sin\beta - \sin\delta \cdot \cos e;$$

daher:

$$\sin\beta = \sin\delta \cdot \cos e - \sin a \cos\delta \cdot \sin e \quad \text{(III.)}$$

Wenn λ, β und e bekannt ist, so ist ebenso:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin\lambda \cdot \cos e - \operatorname{tg}\beta \cdot \sin e}{\cos\lambda} \quad \text{(IV.)} \quad \text{und:}$$

$$\sin\delta = \sin\lambda \cdot \cos\beta \cdot \sin e + \sin\beta \cdot \cos e \quad \text{(V.)}$$

Für die Bestimmung des Winkels $LSN = \pi$ dienen die Gleichungen:

$$\sin\pi = \frac{\cos a \cdot \sin e}{\cos\beta} = \frac{\cos\lambda \cdot \sin e}{\cos\delta} \quad \text{(VI.), oder}$$

$$\cot\pi = \frac{\cot.e.\cos\delta + \sin\delta.\sin a}{\cos a} = \frac{\cot.e.\cos\beta - \sin\beta.\sin\lambda}{\cos\lambda};$$

$$\cot\pi = \frac{\cos e \cdot \cos\delta + \sin\delta \cdot \sin a \cdot \sin e}{\sin e \cdot \cos a};$$

Digitized by Google

$$\cot \pi = \frac{\cos e \cdot \cos \beta - \sin e \cdot \sin \beta \cdot \sin \lambda}{\sin e \cdot \cos \lambda} \quad \text{(VII.)}$$

Endlich findet auch noch die Gleichung statt:

$$\sin \lambda \cdot \cos \beta = \sin a \cdot \cos \delta \cdot \cos e + \sin \delta \cdot \sin e. \quad \text{(VIII.)}$$

§. 69.

Differentiiren wir nunmehr die Gleichung:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin \lambda \cdot \cos e - \operatorname{tg} \beta \cdot \sin e}{\cos \lambda} = \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos e - \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{\sin e}{\cos \lambda},$$

indem wir a, β und λ als veränderlich annehmen, so kömmt:

$$\frac{da}{\cos^2 a} = \frac{d\lambda}{\cos^2 \lambda} \cos e - \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin e \cdot \sin \lambda \cdot d\lambda}{\cos^2 \lambda} - \frac{\sin e \cdot d\beta}{\cos \lambda \cdot \cos^2 \beta}$$

$$da = \frac{d\lambda \cdot \cos e \cdot \cos^2 a}{\cos^2 \lambda} - \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin e \cdot \sin \lambda \cdot d\lambda \cdot \cos^2 a}{\cos^2 \lambda}$$

$$- \frac{\sin e \cdot d\beta \cdot \cos^2 a}{\cos \lambda \cdot \cos^2 \beta}$$

Substituiren wir statt $d\lambda$ und $d\beta$ ihre oben gefundenen Werthe, so folgt:

$$da = -\mathfrak{A} \frac{\cos \cdot (L - \lambda)}{\cos \beta} \frac{\cos e \cdot \cos^2 a}{\cos^2 \lambda} + \mathfrak{A} \cdot \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin e \cdot \sin \lambda \cdot \cos^2 a}{\cos^2 \lambda} + \mathfrak{A} \cdot \sin (L - \lambda) \sin \beta \cdot \frac{\sin e \cdot \cos^2 a}{\cos \lambda \cdot \cos^2 \beta}$$

Setzen wir in dem ersten Theilsatze des zweiten Gliedes dieser Gleichung statt $\cos \beta$, in dem zweiten Theilsatze statt $\cos a$, in dem dritten Theilsatze statt $\cos \lambda$ die entsprechenden Werthe, so folgt:

$$da = -\mathfrak{A} \frac{\cos (L - \lambda) \cdot \cos e \cdot \cos^2 a \cdot \cos \lambda}{\cos^2 \lambda \cdot \cos a \cdot \cos \delta}$$

$$+ \mathfrak{A} \frac{\cos (L - \lambda) \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin e \cdot \sin \lambda \cos^2 \lambda \cdot \cos^2 \beta}{\cos \beta \cdot \cos^2 \lambda \cdot \cos^2 \delta}$$

$$+ \mathfrak{A} \cdot \sin (L - \lambda) \sin \beta \cdot \frac{\sin e \cdot \cos^2 a \cos \beta}{\cos^2 \beta \cdot \cos a \cdot \cos \delta};$$

Digitized by Google

$$da = -\mathfrak{A}\,\frac{\cos e \,.\, \cos a \,.\, \cos (L - \lambda)}{\cos \lambda \,.\, \cos \delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos (L - \lambda) \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \sin \lambda}{\cos {}^2\delta}$$

$$+\,\mathfrak{A}\,\frac{\sin (L - \lambda) \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \cos a}{\cos \delta \,,\, \cos \beta}$$

$$da = -\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos e \,.\, \cos a\, [\cos L \,.\, \cos \lambda + \sin L \,.\, \sin \lambda]}{\cos \lambda \,.\, \cos \delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A}\, [\cos \lambda \,.\, \cos L + \sin L \,.\, \sin \lambda] \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \sin \lambda}{\cos {}^2\delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A}\, (\sin L \cos \,,\lambda - \cos L \,.\, \sin \lambda) \sin \beta \,,\, \sin e \,.\, \cos a}{\cos \delta \,.\, \cos \beta}$$

$$da = -\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos e \,.\, \cos a \,.\, \cos L \,.\, \cos \lambda}{\cos \lambda \,.\, \cos \delta}$$

$$-\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos e \,.\, \cos a \,.\, \sin L \,.\, \sin \lambda}{\cos \lambda \,.\, \cos \delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos \lambda \,.\, \cos L \sin \beta \,,\, \sin e \,.\, \sin \lambda}{\cos {}^2\delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \sin L \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \sin \lambda}{\cos {}^2\delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \sin L \cos \lambda \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \cos a}{\cos \delta \,.\, \cos \beta}$$

$$-\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos L \,.\, \sin \lambda \sin \beta \sin e \,.\, \cos a}{\cos \delta \,.\, \cos \beta \,.}$$

Setzen wir in den beiden letzten Theilsätzen statt cos β seinen Werth, so folgt:

$$da = -\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos e \,.\, \cos a \,.\, \cos L}{\cos \delta}$$

$$-\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos e \,.\, \cos a \,,\, \sin L \,\mathrm{tg}\, \lambda}{\cos \delta}$$

$$+\,\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos \lambda \,.\, \cos L \,,\, \sin \beta \,.\, \sin e \,.\, \sin \lambda}{\cos {}^2\delta}$$

Digitized by Google

$$+\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L \sin {}^2\lambda \sin \beta\,.\,\sin e}{\cos {}^2\delta}$$

$$+\frac{\mathfrak{A}\,\sin L \cos {}^2\lambda\,.\,\sin \beta\,.\,\sin e\,.\,\cos a}{\cos \delta\,.\,\cos a \cos \delta\,.}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}\,.\,\cos L\,.\,\sin \lambda\,.\,\sin \beta\,.\,\sin e\,.\,\cos a\,.\,\cos \lambda}{\cos \delta\,.\,\cos a\,.\,\cos \delta}$$

Bezeichnen wir in diesem Werthe von da den ersten Theilsatz durch I, den zweiten durch II, den dritten durch III u. s. f., so folgt ferner, da sich III gegen VI hebt:

$$da = -I - II + \frac{\mathfrak{A}\,\sin L\,.\,\sin \beta\,.\,\sin e\,.\,(\sin {}^2\lambda + \cos {}^2\lambda)}{\cos {}^2\delta};$$

$$da = -I - II + \frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L\,.\,\sin e\,.\,\sin \beta}{\cos {}^2\delta};$$

$$da = -\frac{\mathfrak{A}\,.\,\cos e\,.\,\cos a\,.\,\cos L}{\cos \delta}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L}{\cos \delta}\left(\cos e\,.\,\cos a\,.\,\mathrm{tg}\,\lambda - \frac{\sin e\,.\,\sin \beta}{\cos \delta}\right).$$

Substituirt man die Werthe für tg λ und sin β aus den Gleichungen II und III, so folgt:

$$da = -\frac{\mathfrak{A}\,.\,\cos e\,.\,\cos a\,.\,\cos L}{\cos \delta} -$$

$$-\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L}{\cos \delta}\left[\cos e\,.\,(\sin a\,.\,\cos e + \mathrm{tg}\,\delta\,.\,\sin e)\right.$$

$$\left.-\frac{\sin e\,.\,(\sin \delta\,.\,\cos e - \sin a\,.\,\cos \delta\,.\,\sin e)}{\cos \delta}\right]$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}\,.\,\cos e\,.\,\cos a\,.\,\cos L}{\cos \delta} - \frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L\,.\cos {}^2e\,.\sin a}{\cos \delta}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L\,.\,\mathrm{tg}\,\delta\,.\,\sin e\,.\,\cos e}{\cos \delta}$$

$$+\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L\,.\,\sin e\,.\,\mathrm{tg}\,\delta\,.\,\cos e}{\cos \delta}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}\,.\,\sin L\,.\,\sin a \sin {}^2e}{\cos \delta}$$

Digitized by Google

Der dritte Theilsatz hebt sich hier gegen den vierten, daher:

$$da = -\frac{\mathfrak{A} \cdot \cos e \cdot \cos a \cdot \cos L}{\cos \delta}$$

$$-\frac{\mathfrak{A} \cdot \sin L \cdot \sin a}{\cos \delta}\,[\cos^2 e + \sin^2 e]$$

$$= -\mathfrak{A}\,\frac{\cos e \cdot \cos a \cdot \cos L}{\cos \delta} - \mathfrak{A}\,\frac{\sin a \cdot \sin L}{\cos \delta}.$$

Also endlich:

$$da = -\frac{\mathfrak{A}}{\cos \delta}\,[\cos e \cdot \cos a \cdot \cos L + \sin a \cdot \sin L].$$

§. 70.

Auf ähnliche Weise finden wir auch den Ausdruck für $d\delta$ oder die Aberration in der Declination. Wir haben nämlich (Gleichung V.)

$$\sin \delta = \sin \lambda \cos \beta \cdot \sin e + \sin \beta \cdot \cos e$$

Hieraus folgt durch Differentiation, wenn wir δ, β und λ als veränderlich ansehen:

$$\cos \delta \cdot d\delta = \cos \beta \cdot \sin e \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda - \sin \lambda \cdot \sin e \cdot \sin \beta \cdot d\beta + \cos e \cdot \cos \beta \cdot d\beta.$$

Substituiren wir die Werthe von $d\lambda$ und $d\beta$, so kömmt:

$$d\delta = -\cos \beta\,\frac{\sin e \cdot \cos \lambda \cdot \mathfrak{A} \cos (L - \lambda)}{\cos \delta \cdot \cos \beta}$$

$$+\frac{\sin \lambda \cdot \sin e \cdot \sin^2 \beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin (L - \lambda)}{\cos \delta}$$

$$-\frac{\cos e \cdot \cos \beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin (L - \lambda) \sin \beta}{\cos \delta}$$

$$= -\frac{\sin e \cdot \cos \lambda \cdot \mathfrak{A} \cdot (\cos L \cdot \cos \lambda + \sin L \cdot \sin \lambda)}{\cos \delta}$$

$$+\frac{\sin \lambda \cdot \sin e \cdot \sin^2 \beta \cdot \mathfrak{A}\,(\sin L \cdot \cos \lambda - \sin \lambda \cdot \cos L)}{\cos \delta}$$

Digitized by Google

$$= \frac{\cos e \cdot \cos \beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin \beta \,(\sin L \cdot \cos \lambda - \sin \lambda \cdot \cos L)}{\cos \delta}$$

$$= - \frac{\sin e \cdot \cos {}^2\lambda \cdot \mathfrak{A} \cdot \cos L}{\cos \delta} - \frac{\sin e \cdot \cos \lambda \cdot \mathfrak{A} \sin L \cdot \sin \lambda}{\cos \delta}$$

$$+ \frac{\sin \lambda \sin e \cdot \sin {}^2\beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin L \cdot \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$- \frac{\sin e \cdot \sin {}^2\beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin {}^2\lambda \cdot \cos L}{\cos \delta}$$

$$- \frac{\cos e \cdot \cos \beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin \beta \cdot \sin L \cdot \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$+ \frac{\cos e \cdot \cos \beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin \beta \cdot \sin \lambda \cdot \cos L}{\cos \delta}$$

Nennen wir zur Abkürzung den ersten Theilsatz A, den zweiten B, den dritten C u. s. f., so ist

$$d\delta = - A - B + C - D - E + F.$$

Da aber $\sin {}^2\beta = 1 - \cos {}^2\beta$ ist, so ist auch

$$C = + \frac{\sin \lambda \cdot \sin e \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin L \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$- \frac{\sin \lambda \cdot \sin e \cdot \cos {}^2\beta \cdot \mathfrak{A} \cdot \sin L \cos \lambda}{\cos \delta}$$

oder der Kürze halber $C = C' - C''$. Hier hebt sich C' gegen B. Die Summe von E, B und C ist also:

$$- \mathfrak{A} \frac{\cos e \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \sin L \cdot \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$- \mathfrak{A} \frac{\sin \lambda \cdot \sin e \cdot \cos {}^2\beta \cdot \sin L \cdot \cos \lambda}{\cos \delta}$$

$$= - \mathfrak{A} \left(\frac{\cos \beta \cdot \cos \lambda \cdot \sin L}{\cos \delta} \right) (\sin \beta \cdot \cos e + \cos \beta \cdot \sin \lambda \sin e).$$

Dieser Ausdruck wird $= - \mathfrak{A} \cdot \cos a \cdot \sin \delta \cdot \sin L$, wenn wir statt $\cos \beta \cdot \cos \lambda$ seinen Werth $\cos a \cdot \cos \delta$ und statt $\sin \beta \cos e + \cos \beta \cdot \sin \lambda \sin e$ seinen Werth $\sin \delta$ setzen.

Addiren wir nun auch die Werthe von F, D und A, so kömmt:

Digitized by Google

$$+ \frac{\cos e \,.\, \cos \beta \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \lambda \,.\, \cos L}{\cos \delta}$$

$$- \mathfrak{A} \frac{\cos L \,.\, \sin e \,(\sin {}^2\beta \,.\, \sin {}^2\lambda + \cos {}^2\lambda)}{\cos \delta}$$

$$= \mathfrak{A} \frac{\cos L}{\cos \delta} [\cos e \,.\, \cos \beta \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \lambda$$

$$- \sin e \,(\sin {}^2\beta \sin {}^2\lambda + \cos {}^2\lambda)]$$

$$= \mathfrak{A} \cos L \left(\frac{\cos e \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \cos \beta}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\beta \,.\, \sin {}^2\lambda}{\cos \delta} - \frac{\sin e \,.\, \cos {}^2\lambda}{\cos \delta} \right)$$

$$= \mathfrak{A} \,.\, \cos L \left(\frac{\cos e \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \cos \beta}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\beta \,.\, \sin {}^2\lambda}{\cos \delta} - \frac{\sin e \,(1 - \sin {}^2\lambda)}{\cos \delta} \right)$$

$$= \mathfrak{A} \,.\, \cos L \left(\frac{\cos e \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \cos \beta}{\cos \delta} + \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\lambda}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\lambda \,.\, \sin {}^2\beta}{\cos \delta} - \frac{\sin e}{\cos \delta} \right)$$

$$= \mathfrak{A} \,.\, \cos L \left(\frac{\cos e \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \cos \beta}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\lambda \,(1 - \sin {}^2\beta)}{\cos \delta} - \frac{\sin e}{\cos \delta} \right)$$

$$= \mathfrak{A} \,.\, \cos L \left(\frac{\cos e \,.\, \sin \lambda \,.\, \sin \beta \,.\, \cos \beta}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin e \,.\, \sin {}^2\lambda \,.\, \cos {}^2\beta}{\cos \delta} - \frac{\sin e}{\cos \delta} \right)$$

Substituiren wir jetzt statt $\sin \beta$ und $\sin \lambda \,.\, \cos \beta$ ihre Werthe aus den Gleichungen III. und VIII., so folgt:

$$\mathfrak{P} + D + A = \mathfrak{A} \,.\, \cos L \left[- \frac{\cos {}^2e \,.\, \sin {}^2a \,.\, \cos {}^2\delta \,.\, \sin e}{\cos \delta} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \delta \,.\, \sin a \,.\, \cos \delta \sin {}^2e \,.\, \cos e}{\cos \delta} \right.$$

Digitized by Google

$$+\frac{\sin a \cdot \cos \delta \cos {}^2e \cdot \sin \delta}{\cos \delta} + \frac{\sin {}^2\delta \cdot \sin e \cdot \cos {}^2e}{\cos \delta}$$

$$+\frac{\sin e \cdot \sin {}^2a \cdot \cos {}^2\delta \cdot \cos {}^2e}{\cos \delta}$$

$$+\frac{2 \cdot \sin a \cdot \cos \delta \cdot \cos e \cdot \sin \delta \cdot \sin {}^2e}{\cos \delta}$$

$$+\frac{\sin {}^2\delta \cdot \sin {}^2e}{\cos \delta} - \frac{\sin e}{\cos \delta}\Big]$$

$$= \mathfrak{A} \cdot \cos L \left[\cos e \cdot \sin a \cdot \sin \delta - \left(\frac{\sin e - \sin {}^2\delta \cdot \sin e}{\cos \delta}\right)\right]$$

$$= \mathfrak{A} \cdot \cos L \,(\cos e \cdot \sin a \cdot \sin \delta - \sin e \cdot \cos \delta)$$

Addiren wir nunmehr die Summe von E, B und C zu der Summe von F, D und A, so folgt:

$$d\delta = -\mathfrak{A} \cdot \cos a \cdot \sin \delta \cdot \sin L + \mathfrak{A} \cdot \cos L \cos e \cdot \sin a \cdot \sin \delta - \mathfrak{A} \cdot \cos L \cdot \sin e \cdot \cos \delta$$

$$= -\mathfrak{A} \cdot \sin e \cdot \cos \delta \cdot \cos L - \mathfrak{A} \cdot \sin \delta \,(\cos a \cdot \sin L - \cos L \cos e \cdot \sin a).$$

Die Gröfsen $d\lambda$, $d\beta$, da, $d\delta$, oder die Aberration in Länge, Breite, Rectascension und Declination, werden mit ihren respectiven Zeichen zu den wahren (oder mittleren) Gröfsen geschlagen, um die scheinbaren, von der Aberration afficirten Orte der Gestirne zu erhalten.

§. 71.

Um den Gleichungen für da und $d\delta$ eine zur Rechnung bequemere Gestalt zu geben, bemerken wir, dafs man dem allgemeinen Ausdrucke: $A\,(q \cdot \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c)$ immer die Gestalt $x \cdot \cos (b - c + y)$ geben kann, wenn man die Gröfsen y, x gehörig bestimmt. Löst man nämlich den letzten Ausdruck auf, so hat man:

Digitized by Google

$(x \cdot \cos b \cdot \cos y - x \cdot \sin b \cdot \sin y) \cos c + (x \cdot \sin b \cdot \cos y + x \cos b \cdot \sin y) \sin c = Aq \cdot \cos b \cdot \cos c + A \cdot \sin b \cdot \sin c$,

und wenn man die Factoren von cos c und sin c auf beiden Seiten gleich setzt, so ist:

$$x (\cos b \cdot \cos y - \sin b \cdot \sin y) = A \cdot q \cdot \cos b;$$

$$x (\sin b \cdot \cos y + \cos b \cdot \sin y) = A \cdot \sin b.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch sin b und die zweite durch — cos b, so gibt ihre Summe:

$$x \cdot \sin y = (1 - q) A \cdot \sin b \cdot \cos b. \quad (I.)$$

Multiplicirt man dagegen die erste durch cos b, und die zweite durch sin b, so gibt ihre Summe:

$$x \cdot \cos y = A - (1 - q) A \cdot \cos^2 b \quad (II.),$$

woraus man sofort findet: $tg\, y = \frac{(1-q) \sin b \cdot \cos b}{1 - (1-q) \cos^2 b}$ (III.)

Erhebt man die beiden Gleichungen I. und II. ins Quadrat und addirt sie, so folgt:

$$x^2 = [(1 - q)^2 \sin^2 b \cos^2 b \cdot + 1 - 2 (1 - q) \cos^2 b + (1 - q)^2 \cos^2 b \cos^2 b] A^2$$

$$= [\sin^2 b \cdot \cos^2 b - 2 q \cdot \sin^2 b \cdot \cos^2 b + q^2 \sin^2 b \cdot \cos^2 b + 1 - 2 \cos^2 b + 2 q \cdot \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 b - 2 q \cos^2 b \cdot \cos^2 b + q^2 \cdot \cos^2 b \cdot \cos^2 b]. \quad A^2$$

$$= [\cos b^2 (\sin^2 b + \cos^2 b) - 2 q \cos^2 b (\cos^2 b + \sin^2 b) + q^2 \cos^2 b (\cos^2 b + \sin^2 b) + 1 - 2 \cos^2 b + 2 q \cdot \cos^2 b] A^2$$

$$= [\cos b^2 - 2 q \cos^2 b + q^2 \cos^2 b + 1 - 2 \cos^2 b + 2 q \cos^2 b] A^2$$

$$= [1 - \cos^2 b + q^2 \cos^2 b] A^2 = [1 - (1 - q^2) \cos^2 b] A^2$$

daher $x = A \sqrt{[1 - (1 - q^2) \cos^2 b]}$ (IV.)

§. 72.

Wendet man Dieses auf den Factor:

$$\mathfrak{A} (\cos e \cdot \cos a \cos L + \sin a \cdot \sin L)$$

der Gleichung für da, und dann auf den Factor:

$$\mathfrak{A} (\cos a \cdot \sin L - \cos e \cdot \sin a \cdot \cos L)$$

Digitized by Google

der Gleichung für dδ an, so ist für den ersten Factor $c = a$, und für den zweiten $c = 90 + a$ und für beide $q = \cos e$, $b = L$. Also ist

$$\text{tg } y = \frac{\left(\sin \frac{e}{2}\right)^2 \sin 2L}{1 - 2\left(\sin \frac{e}{2}\right)^2 \cos {}^2L}$$

$$x = \frac{t}{1} \sqrt{1 - \sin {}^2e \cdot \cos {}^2L}$$

und

$$da = -\frac{x}{\cos \delta} \cos (L + y - a);$$

$\mathfrak{A}(\cos a \cdot \sin L - \cos e \sin a \cdot \cos L) = x \cos (L - (90 + a) + y)$
$= x \cos (L - 90 - a + y) = x \cos [-90 + (L - a + y)]$
$= x \cos -[90 - (L - a + y)] = x \cos [90 - (L - a + y)]$
$= x \cdot \sin (L - a + y)$,
also $-\mathfrak{A} \sin \delta (\cos a \cdot \sin L - \cos e \cdot \sin a \cos L)$
$= -x \cdot \sin \delta \cdot \sin (L - a + y)$.

Endlich kann der Theilsatz $-\mathfrak{A} \cdot \sin e \cdot \cos \delta \cdot \cos L$ durch die beiden Theilsätze:

$$-\mathfrak{A} \cdot \frac{\sin e}{2} \cdot \cos (L - \delta) - \frac{\mathfrak{A} \cdot \sin e}{2} \cos (L + \delta)$$

ausgedrückt werden, daher ist

$$d\delta = -x \cdot \sin \delta \cdot \sin (L + y - a) - \frac{t \cdot \sin e}{2l} \cdot \cos (L - \delta)$$
$$- \frac{t \cdot \sin e}{2l} \cos (L + \delta).$$

§. 73.

da, dδ hat man auf zwei Tafeln gebracht, deren erste die dem Argumente L, oder Länge der Sonne, entsprechende Gröfse x und y und die zweite die den Argumenten $L + \delta$ und $L - \delta$ entsprechenden Gröfsen $-\frac{t}{2l} \sin e \cdot \cos (L - \delta)$ und $-\frac{t}{2l} \sin e \cdot \cos (L + \delta)$ enthält.

Digitized by Google

	0°	180°	30°	210°	60°	240°	
	log x	y +	log x	y +	log x	y +	
0	1.2690	0° 0′	1.2790	2° 11′	1.2977	2° 6′	30
1	1.2690	0 5	1.2796	2 14	1.2983	2 3	29
2	1.2691	0 11	1.2802	2 16	1.2988	2 0	28
3	1.2692	0 16	1.2808	2 18	1.2993	1 57	27
4	1.2692	0 22	1.2815	2 20	1.2998	1 54	26
5	1.2693	0 27	1.2821	2 21	1.3003	1 51	25
6	1.2695	0 32	1.2827	2 23	1.3008	1 47	24
7	1.2696	0 37	1.2834	2 24	1.3012	1 44	23
8	1.2698	0 43	1.2840	2 25	1.3017	1 40	22
9	1.2700	0 48	1.2847	2 26	1.3021	1 36	21
10	1.2703	0 53	1.2853	2 27	1.3025	1 32	20
11	1.2705	0 58	1.2860	2 28	1.3028	1 28	19
12	1.2708	1 3	1.2866	2 28	1.3032	1 24	18
13	1.2711	1 8	1.2873	2 28	1.3036	1 20	17
14	1.2714	1 12	1.2879	2 28	1.3039	1 16	16
15	1.2718	1 17	1.2886	2 28	1.3042	1 11	15
16	1.2721	1 22	1.2892	2 28	1.3045	1 7	14
17	1.2725	1 26	1.2899	2 27	1.3048	1 3	13
18	1.2729	1 30	1.2905	2 27	1.3050	0 58	12
19	1.2733	1 34	1.2912	2 26	1.3053	0 53	11
20	1.2738	1 39	1.2918	2 25	1.3055	0 49	10
21	1.2742	1 42	1.2924	2 24	1.3057	0 44	9
22	1.2747	1 46	1.2931	2 22	1.3059	0 39	8
23	1.2752	1 50	1.2938	2 21	1.3060	0 34	7
24	1.2757	1 53	1.2944	2 19	1.3061	0 30	6
25	1.2762	1 57	1.2949	2 17	1.3063	0 25	5
26	1.2768	2 0	1.2956	2 15	1.3064	0 20	4
27	1.2773	2 3	1.2961	2 13	1.3064	0 15	3
28	1.2779	2 6	1.2966	2 11	1.3065	0 10	2
29	1.2785	2 9	1.2972	2 8	1.3065	0 5	1
30	1.2790	2 11	1.2977	2 6	1.3065	0 0	0
	log x	— y	log x	— y	log x	— y	
	150	330	120	300	90	270	

Digitized by Google

	0° 180°	30° 210°	60° 240°	
Grade.	+ −	+ −	+ −	Grade.
0	4″,0	3″,5	2″,0	30
1	4,0	3,5	2,0	29
2	4,0	3,4	1,9	28
3	4,0	3,4	1,8	27
4	4,0	3,3	1,8	26
5	4,0	3,3	1,7	25
6	4,0	3,3	1,6	24
7	4,0	3,3	1,6	23
8	4,0	3,2	1,5	22
9	4,0	3,2	1,4	21
10	4,0	3,1	1,4	20
11	4,0	3,1	1,3	19
12	3,9	3,0	1,2	18
13	3,9	2,9	1,2	17
14	3,9	2,9	1,1	16
15	3,9	2,8	1,0	15
16	3,9	2,8	1,0	14
17	3,9	2,7	0,9	13
18	3,8	2,7	0,8	12
19	3,8	2,6	0,8	11
20	3,8	2,6	0,7	10
21	3,8	2,5	0,6	9
22	3,7	2,5	0,6	8
23	3,7	2,4	0,5	7
24	3,7	2,4	0,4	6
25	3,7	2,3	0,3	5
26	3,6	2,3	0,3	4
27	3,6	2,2	0,2	3
28	3,6	2,1	0,1	2
29	3,5	2,1	0,1	1
30	3,5	2,0	0,0	0
	− +	− +	− +	
	150° 330°	120° 300°	90° 270°	

§. 74.

Beispiel.

Es sey die Rectascension a eines Sterns = 261° 31′, die Declination δ = 12°,43′, die Länge L die Sonne = 40° 52′.

Es ist also y = 2° 28′

Für L = 40° würde log x = 1, 2853 und für L = 41°

Digitized by Google

würde log x = 1 . 2860 seyn. Es ist also für L = 40° 52′ log x = 1 , 2859; L + y — a ist = 40° 52′ + 2° 28′ — 261° 31′ = — 218°,11′; cos (— 218°,11′) = — cos 38°,11′.

Es ist ferner log . cos . 38°,11′ = 0,8954 — 1

log x = 1,2859

11,1813 — 10

log cos δ = 9,9892 — 10

log da = 1,1921

da = + 15″,6

---

log sin 38°,11′ = 9,7911 — 10

log sin 12°,43′ = 9,3427 — 10

log x = 1,2859

log 2″,6 = 0,4197

Ferner ist L + δ = 53°,35′, L — δ = 28°,9′

Wir finden daher aus der zweiten Tafel

$$-\frac{t \cdot \sin e}{2\,l} \cos (L - \delta) = + 3'',6 \quad \text{und}$$

$$-\frac{t \cdot \sin e}{2\,l} \cos (L + \delta) = + 2'',4$$

Es ist also endlich dδ = 2″,6 + 2″,4 + 3″, 6 = + 8″, 6.

Sechstes Capitel.

Von der Nutation.

§. 75.

Aus dem vierten Capitel ist uns bekannt, dafs der Pol des Aequators in dem Zeitraume von 25848 Jahren einen Kreis O M N P (Fig. 38.) um den Pol der Ekliptik C beschreibt,

Digitized by Google

dessen Halbmesser C W = e = der Schiefe der Ekliptik ist, und dafs in dieser Bewegung die Präcession der Nachtgleichen ihren Ursprung hat.

Durch scharfe Beobachtungen hat man aber die weitere Bemerkung gemacht, dafs der Pol des Aequators bei seinem Kreislaufe um den Pol der Ekliptik einer beständigen Schwankung (Nutation) unterliegt, und fortwährend kleine Ellipsen beschreibt. Die Zeit, welche der Pol des Aequators braucht, um eine solche Ellipse (FSQR) zu beschreiben, beträgt 18 Jahre, 223 Tage, 7 Stunden, 13 Minuten. Genaue Untersuchungen haben ergeben, dafs die grofse Axe einer jeden solchen Ellipse = 19″,30 = 2 h, die kleine Axe dagegen = 14″,36 = 2 g ist; die erstere berührt den Breitenkreis, die letztere steht senkrecht auf demselben. Der Mittelpunct der Ellipse wird der „mittlere Pol" des Aequators genannt.

Die Länge des wahren Pols, der in der Peripherie der Ellipse liegt, wird auf folgende Weise bestimmt. Man beschreibt in der Ebene der Ellipse einen Kreis, dessen Halbmesser die halbe grofse Axe h der Ellipse ist, und denkt sich einen Halbmesser dieses Kreises W m in gleichförmiger Bewegung um seinen Mittelpunct, und zwar in einer Richtung, welche der jährlichen Bewegung der Sonne entgegen ist, so, dafs dieser Halbmesser mit der halben grofsen Axe RW dann zusammenfällt, wenn der aufsteigende Knoten der Mondsbahn in der Ekliptik mit dem Frühlingspuncte zusammenfällt. *)

*) Die Mondsbahn macht mit der Ebene der Ekliptik im Mittel einen Winkel von 5° 8′ 49″, und durchschneidet sie also in zwei einander gegenüberliegenden Puncten, die man Knoten nennt. In dem aufsteigenden Knoten ☊ erhebt sich der Mond über die Ebene der Ekliptik nach Norden, in dem niedersteigenden ☋ geht er unter dieselbe hinab nach Süden. Eine gerade Linie von einem dieser Knoten zum andern heifst die Knotenlinie der Mondsbahn.

Digitized by Google

Fällt man dann von dem Endpuncte dieses Halbmessers auf die grofse Axe der Ellipse ein Perpendikel herab, so ist der Durchschnittspunct t dieses Perpendikels mit der Peripherie der Ellipse der Ort des wahren Pols des Aequators. Diese Bewegung des wahren Pols in einer Ellipse um den mittleren Pol stellt die Nutation vor.

Da hiernach die grofse Axe der Ellipse in dem Colure der Solstitien liegt, so wird der Winkel, welchen der bewegliche Halbmesser Wm mit der Knotenlinie der Mondsbahn zu der Zeit bildet, wo jener Halbmesser mit der grofsen Axe der Ellipse zusammenfällt, ein rechter seyn, und da die Bewegung des Halbmessers sowohl, als die des mittleren Mondsknoten gleichförmig ist, und in derselben Richtung vor sich geht, so ist klar, dafs dieser Winkel während der ganzen Umlaufszeit des Halbmessers Wm ein rechter Winkel bleiben, d. h. dafs der Halbmesser mit der halben grofsen Axe WR immer einen Winkel bilden wird, welcher = der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn in der Ekliptik = Λ ist.

§. 76.

Bezeichnen wir nun den Perpendikel mn durch z, das Stück tn durch y, das Stück Wn der grofsen Axe durch x und den Winkel tWn durch A, so hat man:

$$\frac{z}{x} = tg\ \Lambda$$

$$\frac{y}{x} = tg\ A,$$

also auch, wenn wir den Werth von x aus der ersteren Glei-

Nicht nur die Neigung der Mondsbahn, sondern auch die Lage ihrer Knotenlinie ist veränderlich. Jene kann sich um etwa 9′ ändern; diese weicht täglich um 3′ 10″ nach Westen zurück, so dafs sie in 18 Jahren 223 T. 7 St. 18′ einen vollen Kreis beschreibt, wobei man die Erde als stillstehend betrachtet.

Digitized by Google

chung substituiren: $\text{tg } A = \frac{y}{z} \cdot \text{tg } A$ und da $\frac{y}{z} = \frac{g}{h}$ ist,

so hat man ferner $\text{tg } A = \frac{g}{h} \text{ tg } A$

Endlich ist: $x = h \cdot \cos A$ und $y = x \cdot \text{tg } A$. Substituiren wir in dieser letzten Gleichung statt x und tg A ihre Werthe, so folgt $y = g \cdot \sin A$.

Verbindet man den Punct t mit dem Pole der Ekliptik, d. h. mit dem Puncte C, so entsteht das sphärische Dreieck t n C, in welchem die Seite $tn = y$, $Cn = e + x$, $Ct = e + de$ ist; der Winkel t C n ist = der gesuchten Veränderung des Aequinoctialpunctes = $d\lambda$.

Bekanntlich verhält sich in einem sphärischen rechtwinkligen Dreiecke der Cosinus der einen Kathete zu 1, wie der Cosinus der Hipotenuse zu dem Cosinus der andern Kathete. Man hat also $\cos (e + de) = \cos y \cdot \cos (x + e)$.

Es verhält sich ferner die Tangente einer Kathete zu der Tangente ihres gegenüberstehenden Winkels, wie der Sinus der andern Kathete zum Halbmesser. Daher

$$\text{tg } d\lambda = \frac{\text{tg } y}{\sin (x + e)}$$

Näherungsweise kann statt dieser beiden Gleichungen gesetzt werden: $de = x$; $d\lambda = \frac{y}{\sin e}$,

weil x, y und de nur sehr kleine Gröfsen sind. Substituirt man die obigen Werthe von x und y, so folgt:

$de = h \cdot \cos A = 9'',65 \cdot \cos A$

$d\lambda = -g \frac{\sin A}{\sin e} = -18'',08 \sin A$, *) wenn $e = 23°28'$ ist.

*) Wenn sich der aufsteigende Knoten der Mondsbahn im ersten Quadranten der Länge befindet, so wird die Länge der Sterne durch die Nutation vermindert; daher das Zeichen — bei dem Werthe für $d\lambda$.

Digitized by Google

Dieses sind also die Ausdrücke für die durch die Nutation bewirkten Veränderungen in der Schiefe der Ekliptik und der Länge der Fixsterne.

Die Breite der Fixsterne wird von der Nutation nicht afficirt.

§. 77.

Suchen wir nun aus den Gröfsen $d\lambda$ und de die Nutation der Sterne in Rectascension (da) und in Declination $(d\delta)$ zu bestimmen.

Wir differentiiren zu diesem Zweck die in dem vorigen Capitel §. 68. angegebenen Gleichungen III und V. Aus der erstern folgt, wenn wir a, δ, λ, β und e als veränderlich ansehen:

$$\cos\beta \,.\, d\beta = -\sin a \,.\, \cos\delta \,.\, d \,.\, \sin e - \sin a\, d\cos\delta \,.\, \sin e$$
$$- d\sin a \,.\, \cos\delta \,.\, \sin e + \sin\delta \,.\, d\cos e + d\sin\delta \,.\, \cos e$$
$$= -\sin a \,.\, \cos\delta \,.\, \cos e \,.\, de + \sin a \,.\, \sin\delta \,.\, \sin e \,.\, d\delta$$
$$- \cos a \,.\, \cos\delta \,.\, \sin e \,.\, da - \sin\delta \,.\, \sin e \,.\, de + \cos e \,.\, \cos\delta \,.\, d\delta$$

Setzen wir statt $\cos\beta$ aus der Gleichung VI in dem nämlichen Paragraphen seinen Werth $\frac{\cos a \,.\, \sin e}{\sin\pi}$ und lassen wir blofs $d\beta$ auf der linken Seite der Gleichung stehen, so folgt:

$$d\beta = -\frac{\sin a \,.\, \cos\delta \,.\, \cos e \,.\, \sin\pi \,.\, de}{\cos a \,.\, \sin e} + \frac{\sin\pi \,.\, \sin a \,.\, \sin\delta \,.\, \sin e \,.\, d\delta}{\cos a \,.\, \sin e}$$
$$- \frac{\sin\pi \,.\, \cos a \,.\, \cos\delta \,.\, \sin e \,.\, da}{\cos a \,.\, \sin e} - \frac{\sin\pi \,.\, \sin\delta \,.\, \sin e \,.\, de}{\cos a \,.\, \sin e} + \frac{\sin\pi \,.\, \cos e \,.\, \cos\delta \,.\, d\delta}{\cos a \,.\, \sin e}$$

Der zweite und letzte Theilsatz sind vereinigt =

$$\sin\pi \, d\delta \left(\frac{\sin a \,.\, \sin\delta \,.\, \sin e + \cos e \,.\, \cos\delta}{\cos a \,.\, \sin e}\right)$$

Digitized by Google

Setzen wir statt des zweiten Factors dieses Ausdruckes seinen Werth aus der Gleichung, welche der Gleichung VII im vorigen Capitel unmittelbar vorausgeht, so erhalten wir:

$$\sin \pi \,.\, d\delta \,.\, \cot \pi = \cos \pi \,.\, d\delta \,. = A.$$

Der dritte Theilsatz des Werthes von $d\beta$ ist

$$= - \sin \pi \,.\, \cos \delta \,.\, da = B.$$

Die beiden übrigen Theilsätze sind vereinigt =

$$- \frac{\sin \pi \,.\, de}{\cos a \,.\, \sin e} (\sin a \,.\, \cos \delta \,.\, \cos e + \sin \delta \,.\, \sin e)$$

Setzen wir statt des zweiten Factors dieses letzteren Ausdruckes seinen Werth aus der Gleichung VIII, so kömmt:

$$- \frac{\sin \pi \,.\, de \,.\, \sin \lambda \,.\, \cos \beta}{\cos a \,.\, \sin e.}$$

Setzen wir endlich statt $\sin \pi$ seinen Werth aus der Gleichung VI, so folgt:

$$- \frac{\cos a \,.\, \sin e \,.\, de \,.\, \sin \lambda \,.\, \cos \beta}{\cos \beta \,.\, \cos a \,.\, \sin e} = - \sin \lambda \,.\, de = C.$$

Durch Addition der Werthe A, B und C erhalten wir endlich:

$$d\beta = d\delta \cos \pi - da \,.\, \sin \pi \cos \delta - \sin \lambda \,.\, de \quad (1.)$$

Auf ganz ähnliche Weise finden wir aus V den Werth

$$d\delta = d\lambda \,.\, \sin \pi \,.\, \cos \beta + d\beta \,.\, \cos \pi + de \,.\, \sin a \quad (2.)$$

§. 78.

Aus diesen beiden Gleichungen 1 und 2 folgt, wenn wir $d\beta = 0$ setzen:

$$da = \frac{d\delta \,.\, \cos \pi}{\sin \pi \,.\, \cos \delta} - \frac{\sin \lambda \,.\, de}{\sin \pi \,.\, \cos \delta} \quad (3.)$$

$$d\delta = d\lambda \,.\, \sin \pi \,.\, \cos \beta + de \,.\, \sin a \quad (4.)$$

Substituiren wir diesen Werth von $d\delta$ in die Gleichung (3.), so folgt:

Digitized by Google

$$da = \frac{d\lambda \,.\, \sin\pi \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\varepsilon}{\sin\pi \,.\, \cos\delta} + \frac{de \,.\, \sin a \,.\, \cos\pi}{\sin\pi \,.\, \cos\delta}$$

$$- \frac{\sin\lambda \,.\, de}{\sin\pi \,.\, \cos\delta} \quad (5.)$$

Substituiren wir nunmehr statt $d\lambda$ und de ihre obigen Werthe (§. 76.) in die Gleichungen (4) und (5), so folgt:

$$d\delta = -g \frac{\sin\Lambda}{\sin e} \sin\pi \,.\, \cos\beta + h \,.\, \cos\Lambda \sin a \quad (6.)$$

$$da = -g \frac{\sin\Lambda \cos\beta \,.\, \cos\pi}{\sin e \,.\, \cos\delta} + \frac{h \,.\, \cos\Lambda \sin a \,.\, \cos\pi}{\sin\pi \,.\, \cos\delta}$$

$$- \frac{\sin\lambda \,.\, h \,.\, \cos\Lambda}{\sin\pi \,.\, \cos\delta}$$

$$= -g \frac{\sin\Lambda \cos\beta \,.\, \cos\pi}{\sin e \,.\, \cos\delta} - \left(\frac{\sin\lambda - \sin a \,.\, \cos\pi}{\sin\pi}\right) \frac{h \,.\, \cos\Lambda}{\cos\delta}$$

Die sphärische Trigonometrie lehrt aber, dafs:

$$\frac{\sin\lambda - \sin a \,.\, \cos\pi}{\sin\pi} = \sin\delta \,.\, \cos a,$$

daher

$$da = -g \frac{\sin\Lambda \cos\beta \,.\, \cos\pi}{\sin e \,.\, \cos\delta} - h \,.\, \cos\Lambda \frac{\sin\delta \,.\, \cos a}{\cos\delta} \quad (7.)$$

Es ist ferner aus der Trigonometrie bekannt, dafs:

$$\cos\pi \,.\, \cos\beta = \cos e \,.\, \cos\delta + \sin e \,.\, \sin\delta \,.\, \sin a,$$

$$\sin\pi \,.\, \cos\beta = \sin\varrho \,.\, \cos a$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen 6 und 7, so folgt:

$$da = -g \,.\, \sin\Lambda \cot e - (h \,.\, \cos a \cos\Lambda + g \,.\, \sin a \,.\, \sin\Lambda) \operatorname{tg}\delta \quad (8.)$$

$$d\delta = -(g \,.\, \sin\Lambda \cos a - h \,.\, \cos\Lambda \sin a) \quad (9.)$$

Diese beiden letzteren Gleichungen drücken die Nutation in der Rectascension und Declination aus. Die Gröfsen da und $d\delta$ mufs man mit ihren Zeichen zu den mittleren Rectascensionen und Declinationen addiren, um die wahren, oder wie sie auch genannt werden, die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen zu erhalten.

Digitized by Google

§. 79.

Nehmen wir nun mit diesen Gleichungen die nämlichen Transformationen vor, wie bei den Gleichungen der Aberration, und setzen wir zu dem Ende $-g \sin A \cot e = z$; bemerken wir ferner, dafs:

$$h \cos a \cdot \cos A + g \sin a \cdot \sin A$$
$$= g\left(\frac{h}{g} \cos a \cdot \cos A + \sin a \sin A\right); \quad (a.)$$

und $g \sin A \cos a - h \cdot \cos A \sin a$
$$= g\,(\sin A \cos a - \frac{h}{g} \cos A \sin a). \quad (b.)$$

Für (a) ist $c = a$, für (b) $c = 90^\circ + a$ und für beide $b = A$, $g = A$, $q = \frac{h}{g}$, daher nach §. 71:

$$x = g\sqrt{1 + \left(\frac{h^2}{g^2} - 1\right) \cos .^2 A}$$

$$tg\, y = \frac{\left(1 - \frac{h}{g}\right) \sin A \cos A}{1 - \left(1 - \frac{h}{g}\right) \cos^2 A}$$

Man hat also:

$$da = z - tg\, \partial \cdot x \cdot \cos (A - a + y)$$
$$d\partial = -x \cos (A - a - 90^\circ + y)$$
$$= -x \cdot \sin (A - a + y)$$

Für diese Ausdrücke ist die nachstehende Tafel berechnet worden.

Digitized by Google

Argument: Länge des Knotens der Mondsbahn.

	0			180			30			210			60			240			
	log x	y −	z −+		log x	y −	z −+		log x	y −	z −+		log x	y −	z −+		
0	0.9531	0° 0′	0″,00	0.9275	6° 45′	7″,70	0.8647	7°48′	13″,33	30
1	0.9531	0 15	0,27	0.9258	6 54	7,98	0.8625	7 40	13,46	29
2	0.9530	0 31	0,54	0.9241	7 3	8,16	0.8604	7 32	13,59	28
3	0.9529	0 46	0,80	0.9223	7 12	8,39	0.8583	7 23	13,72	27
4	0.9527	1 1	1,07	0.9205	7 20	8,61	0.8562	7 14	13,84	26
5	0.9524	1 16	1,34	0.9187	7 28	8,83	0.8541	7 4	13,95	25
6	0.9521	1 32	1,61	0.9168	7 36	9,05	0.8521	6 53	14,06	24
7	0.9517	1 47	1,88	0.9149	7 43	9,26	0.8501	6 42	14,17	23
8	0.9513	2 2	2,14	0.9129	7 49	9,48	0.8482	6 29	14,27	22
9	0.9508	2 17	2,41	0.9109	7 56	9,69	0.8463	6 17	14,37	21
10	0.9502	2 31	2,67	0.9089	8 1′	9,90	0.8445	6 3	14,47	20
11	0.9496	2 46	2,94	0.9069	8 6	10,10	0.8427	5 49	14,56	19
12	0.9489	3 1	3,20	0.9048	8 10	10,30	0.8410	5 35	14,64	18
13	0.9483	3 15	3,46	0.9027	8 14	10,50	0.8394	5 20	14,72	17
14	0.9474	3 29	3,72	0.9005	8 17	10,70	0.8378	5 4	14,80	16
15	0.9465	3 43	3,98	0.8984	8 20	10,89	0.8363	4 48	14,87	15
16	0.9456	3 57	4,24	0.8962	8 23	11,08	0.8349	4 31	14,94	14
17	0.9447	4 12	4,50	0.8940	8 24	11,26	0.8336	4 14	15,00	13
18	0.9437	4 24	4,76	0.8917	8 25	11,44	0.8324	3 56	15,06	12
19	0.9426	4 37	5,01	0.8895	8 25	11,62	0.8312	3 38	15,11	11
20	0.9415	4 50	5,27	0.8873	8 25	11,79	0.8302	3 20	15,16	10
21	0.9403	5 3	5,52	0.8850	8 24	11,96	0.8292	3 1	15,21	9
22	0.9391	5 16	5,77	0.8827	8 23	12,13	0.8283	2 41	15,25	8
23	0.9378	5 28	6,02	0.8805	8 21	12,28	0.8275	2 22	15,28	7
24	0.9365	5 40	6,26	0.8782	8 18	12,45	0.8268	2 2	15,31	6
25	0.9351	5 51	6,51	0.8759	8 15	12,61	0.8263	1 42	15,34	5
26	0.9337	6 3	6,75	0.8737	8 11	12,76	0.8258	1 22	15,36	4
27	0.9322	6 14	6,99	0.8714	8 6	12,91	0.8254	1 2	15,37	3
28	0.9307	6 24	7,23	0.8691	8 1	13,06	0.8252	0 41	15,39	2
29	0.9291	6 35	7,46	0.8670	7 55	13,20	0.8250	0 21	15,39	1
30	0.9275	6 45	7,70	0.8647	7 48	13,33	0.8249	0 0	15,40	0
	log x	+ y	−+ z	log x	+ y	−+ z	log x	+ y	−+ z	
	150		330	120		300	90		270	

Digitized by Google

§. 80.

Beispiel.

Für α Ophiuchi war am 1. Mai 1818

$a = 261^\circ, 30' 35'', 46$

$\delta = 12^\circ, 42', 41'', 06$

$A = 232^\circ 9'$, also $y = -8^\circ 23'$, $A + y - a = -37^\circ, 45' = m$; daher

log x	= 0,8827 n	. . . . .	0,8827 n
log cos m	= 9,8980	log sin m	= 9.7869 n
log tg δ	= 9,3535		0,6696
	0,1342		$d\delta = +4'',7.$

Zahl $= -1'',36$

$z = +12'',13$

$da = 10'',77$

wo der Buchstab n am Ende der Logarithme anzeigt, dafs diese Logarithmen zu negativen Zahlen gehören.

Siebentes Capitel.

Von der Refraction.

§. 81.

Aus der Optik ist es bekannt, dafs ein Lichtstrahl, wenn er aus einem dünnern Mittel in ein dichteres, oder umgekehrt, aus einem dichteren in ein dünneres übergeht, eine Ablenkung von seinem bis dahin verfolgten Wege erleidet, und dafs diese um so gröfser ausfällt, je schiefer der Winkel ist, den der einfallende Strahl mit der ihn brechenden Fläche bildet. Es stelle nämlich (Fig. 39.) MNOP den Durchschnitt der brechenden Fläche, z. B. eines Glases vor, AB sey ein Strahl, welcher die Fläche in B trifft; in B sey auf

Digitized by Google

MN das Loth CBDE errichtet, welches das Einfallsloth heifsen mag. Indem nun der Lichtstrahl AB aus einem dünnern Mittel in ein dichteres übergeht, z. B. aus Luft in Glas, so bleibt er zwar in derjenigen Ebene, welche durch den Strahl AB und durch das Loth CB gelegt werden kann, aber er geht in dem Glase nicht auf der geraden Linie ABO fort, sondern in der Linie BF, welche dem Einfallslothe näher liegt, und bei seinem Austritte aus dem Glase verfolgt er wieder die Richtung FG, welche mit seiner früheren Richtung AB parallel ist. Die Brechung der Lichtstrahlen besteht also darin, dafs der Strahl mit dem Einfallslothe in dem dünnern Mittel einen gröfsern, in dem dichtern Mittel einen kleinern Winkel bildet, und die sorgfältigsten Beobachtungen haben gezeigt, dafs der Sinus des Winkels ABC, (des sogenannten Einfallswinkels) zum Sinus des Winkels DBF (des s. g. gebrochenen Winkels) bei gleichen Materien ein gewisses unveränderliches Verhältnifs behält, z. B. wenn der Strahl aus Luft ins Glas fährt, wie 3:2, aus der Luft ins Wasser wie 4:3. Der Brechungswinkel FBO wird immer gröfser, je mehr der Einfallswinkel wächst, oder je schiefer der einfallende Strahl die Oberfläche der dichteren Materie berührt. Wenn hingegen der Lichtstrahl senkrecht auf PN, oder nach der Richtung CB, einfällt, so wird er nicht gebrochen, sondern fährt in allen Fällen von B gerade nach D hin.

Es sey nun (Fig. 40.) AB die Oberfläche der Erde, EKG die äufsere Oberfläche der Atmosphäre, welche die Erde umgibt. Es sey ferner A der Ort des Beobachters und MK ein Lichtstrahl, der von einem Himmelskörper in M ausgeht, und schief auf die Atmosphäre in K einfällt. Wenn er hier kein Hindernifs, oder ein von dem, in welchem er vorher ging, in Hinsicht der Dichtigkeit nicht verschiedenes Me-

Digitized by Google

dium anträfe, so würde er seinen Weg in derselben Richtung fortsetzen, und die Verticallinie ZC in a treffen, also der Himmelskörper vom Auge nicht gesehen werden. Wenn aber in K ein Medium von gröfserer Dichtigkeit anfängt, so bricht sich der Strahl MK beim Eintritte ein wenig, und wird sich, wenn er beim weitern Fortrücken immer dichtere Schichten trifft, immer mehr und mehr brechen, bis er durch die letzte Brechung nach A gelangt. Weil wir aber über den Ort, welchen die Gegenstände einnehmen, nicht anders urtheilen können, als nach der Richtung, welche die Lichtstrahlen in dem Augenblicke haben, in welchem sie unser Auge treffen, so versetzen wir auch hier den Himmelskörper nach der Richtung, welche der Lichtstrahl bei der letzten Brechung hatte, nach N, und nicht nach M, wo er sich wirklich befindet. Der Winkel NKM, oder die Summe aller Brechungen des Lichtstrahls von seinem Eintritte in die Atmosphäre bis dahin, wo er das Auge trifft, wird die astronomische Refraction genannt.

§. 82.

Durch diese Refraction werden also sämmtliche Himmelskörper scheinbar dem Zenith genähert, und vom Horizonte entfernt. Im Zenith selbst findet keine Refraction statt, weil hier sowohl der Einfallswinkel als auch der Brechungswinkel = o ist. Vom Zenith bis zum Horizont nimmt dagegen die Refraction immer zu.

Die Azimuthe werden durch die Refraction nicht geändert.

Um die den verschiedenen Höhen entsprechende Gröfse der Refraction zu bestimmen, wählt man am besten diejenigen nördlichen Sterne, welche nicht untergehen, die s. g. Circumpolarsterne. Man nehme einen der niemals untergehenden Sterne, der nahe am Zenith des Beobachters culmi-

Digitized by Google

nirt, so dafs zur Zeit der Culmination die Strahlenbrechung fast ganz wegfällt, und messe in diesem Augenblicke den Abstand des Sterns vom Scheitel. Wenn also die Polhöhe gegeben ist, so findet man leicht, wie hoch über dem Nordpol der Stern culminirte, und in welcher Höhe eben dieser Stern 12 Stunden später unterhalb des Nordpols durch den Meridian gehen mufs. Beobachtet man aber die Höhe des Sterns bei diesem zweiten Durchgang durch den Meridian *), so findet man seine Höhe immer gröfser, als die berechnete, und der Ueberschufs der beobachteten über die berechnete Höhe ist die astronomische Strahlenbrechung.

Auch kann man die Höhe der Sonne aus ihrer bekannten Declination und der Polhöhe des Beobachtungsorts für verschiedene Stunden aufs Genauste im Voraus berechnen, und nun in diesen Augenblicken die Höhe derselben messen. Man wird dann die Sonne allemal gerade um die Wirkung der Strahlenbrechung höher über dem Horizonte finden.

§. 83.

Es würde schon an sich eine sehr mühevolle Arbeit gewesen seyn, die Refraction für jede mögliche Höhe von 0′ bis zu 90° durch wirkliche Beobachtung zu finden, sie ist aber auch noch aus einem andern Grunde völlig unausführbar. In einer Höhe, welche mehr als 45° beträgt, werden die Refractionen so klein, dafs eine unmittelbare Beobachtung nicht mehr die erforderliche Genauigkeit gewähren kann; denn wenn der Unterschied der beobachteten und der berechneten Höhe nur einige Secunden beträgt, so können die Beobachtungsfehler im Verhältnifs zu der auszumittelnden Gröfse

*) Es ist allgemein bekannt, dafs man mittels guter Fernröhren die Sterne auch bei Tage beobachten kann.

Digitized by Google

viel zu grofs werden, als dafs man auf das Ergebnifs mit einiger Sicherheit bauen könnte.

Man hat daher über die Brechung des Lichtes in verschiedenen Höhen und bei verschiedenen Barometer- und Thermometerständen die sorgfältigsten Beobachtungen angestellt, und daraus die Eigenschaften derjenigen krummen Linie entwickelt, welche das Licht bei seiner Bewegung durch die Atmosphäre zurücklegen mufs. Aus diesen Elementen, zum Theil aber auch aus blofs wahrscheinlichen Voraussetzungen, hat man sodann die Gesetze herzuleiten gesucht, nach welchen die Refraction mit der Höhe abnehmen mufs, und das Ergebnifs wieder mit den Beobachtungen verglichen. Wir begnügen uns, die von Bradley angegebenen Refractionen für einige Höhen hier mitzutheilen.

Scheinbare Höhe.		Astronomische Refraction.		Scheinbare Höhe.		Astronomische Refraction.	
Grad.	Min.	Min.	Sec.	Grad.	Min.	Min.	Sec.
0	0	33	0	9	0	5	48
0	15	30	36	10	0	5	15
0	30	28	22	11	0	4	47
0	45	26	20	12	0	4	23
1	0	24	28	13	0	4	3
1	30	21	15	14	0	3	45
2	0	18	35	15	0	3	31
2	30	16	24	20	0	2	36
3	0	14	36	25	0	2	2
3	30	13	6	30	0	1	38
4	0	11	51	35	0	1	21
4	30	10	48	40	0	1	8
5	0	9	54	45	0	0	57
5	30	9	8	50	0	0	48
6	0	8	28	60	0	0	33
6	30	7	52	70	0	0	21
7	0	7	20	80	0	0	10
8	0	6	29	90	0	0	0

Digitized by Google

§. 84.

Die in dieser Tabelle fehlenden Höhen müssen durch Interpolation ersetzt werden.

Hätte man also mit einem Theodoliten die Höhe eines Sterns z. B. 15° beobachtet, so wären nach der Tafel von dieser scheinbaren Höhe wegen der Wirkung der Strahlenbrechung 3′ 31″ zu subtrahiren, und die wahre Höhe des Sterns, die bei Berechnungen allemal zum Grunde liegen mufs, würde seyn: 14° 56′ 29″.

Diese Tabelle enthält jedoch eigentlich nur die mittlere astronomische Strahlenbrechung. Es ist leicht einzusehen, dafs diese einer Veränderung unterworfen ist, sobald die Dichtigkeit der Luft theils durch ihre von der Wärme entstehenden Ausdehnung, theils durch eine andere Schwere, die sich aus dem Steigen und Fallen des Barometers ergibt, verändert wird. Jene mittlere Strahlenbrechung findet statt, wenn das Barometer 27 Zoll 9,3 Linien (Pariser Maafs) und das Reaumursche Thermometer 8° über Null angibt. Folgende Tafel enthält die Angaben zur Verwandlung der mittleren Strahlenbrechung in die wahre bei verschiedenen Barometer- und Thermometerständen.

Barometerhöhen in Pariser Maafs.

Reaum. Thermom.	27 Zoll, 0 Linie.	27 Z. 4 L.	27 Z. 8 L.	28 Z. 0 L.	28 Z. 4 L.	28 Z. 8 L.
Ueber Null.						
25°	0,885	0,897	0,909	0,921	0,933	0,945
20°	0,909	0,921	0,933	0,945	0,957	0,969
15	0,934	0,946	0,958	0,970	0,982	0,994
10	0,961	0,973	0,985	0,997	1,009	1,021
5	0,989	1,001	1,013	1,025	1,037	1,049
0	1,019	1,031	1,043	1,055	1,067	1,079
Unter Null.						
5°	1,051	1,063	1,075	1,087	1,099	1,111
10	1,085	1,097	1,109	1,121	1,133	1,145
15	1,121	1,133	1,145	1,157	1,169	1,181
20	1,160	1,172	1,184	1,196	1,208	1,220

Digitized by Google

Mit diesen Decimalbrüchen wird die aus der vorigen Tafel genommene mittlere Strahlenbrechung multiplicirt. Gesetzt, es stehe zu der Zeit, wo die scheinbare Höhe eines Sterns zu 18° beobachtet worden, wofür die mittlere Strahlenbrechung 4′ 3″ beträgt, das Barometer auf 27 Zoll 8 Linien und das Thermometer auf 15° über Null, so gibt nach dieser Tafel 4′ 3″ mit 0,958 multiplicirt = 3′ 53″ die wahre astronomische Strahlenbrechung.

Achtes Capitel.

Von der Parallaxe.

§. 85.

Ein Weltkörper A (Fig. 41.), der eine mit dem Halbmesser der Erde vergleichbare Entfernung von uns hat, welches nur beim Monde, der Sonne und den Planeten der Fall ist, wird von einem Beobachter auf der Oberfläche der Erde nicht an demselben Orte der scheinbaren Himmelskugel PZR gesehen, wo er von dem Mittelpuncte C der Erde aus betrachtet, ihm erscheinen würde. Auf jenem Standpuncte erscheint er in H, oder im scheinbaren Horizonte, also niedriger, von C aus gesehen in D, also höher am Himmel. Der Unterschied DH beider Oerter an der Himmelssphäre, von denen H der scheinbare, D aber der wahre genannt wird, oder der Winkel BAC = DĀH, den die von beiden Standpuncten aus nach dem Mittelpuncte des Gestirns A gezogenen Gesichtslinien mit einander bilden, heifst die Parallaxe. BAC ist die Horizontalparallaxe und BMC, so wie jeder andere Winkel bis zum Zenith hin, die Höhenparallaxe. Jene ist am gröfsten; diese nimmt mit der zunehmenden Höhe eines Himmelskörpers nach

Digitized by Google

dem Zenith hin allmählig ab, und hört im Zenith gänzlich auf.

Durch die Bestimmung der Parallaxen werden also alle Beobachtungen, welche an verschiedenen Orten der Erde gemacht worden sind, und welche mit einander verglichen werden sollen, auf einen gemeinschaftlichen Ort, den Mittelpunct der Erde, reducirt.

Ist uns die wahre oder geocentrische Breite (β) und Länge (λ) eines Himmelskörpers nebst seiner Horizontalparallaxe π bekannt, so können wir auch leicht die scheinbare (von der Parallaxe afficirte) Rectascension α' und Declination δ' des Gestirns finden.

§. 86.

Es sey (Fig. 42.) C der Mittelpunct der Erde, S ein Gestirn, rsK die Ekliptik, L und O die beiden Pole derselben, Bogen $Ss = \beta$ die Breite des Gestirns, Bogen $rs = \lambda$ die Länge derselben. Man drücke die Lage des Gestirns gegen den Mittelpunct der Erde durch drei rechtwinklige Coordinaten aus, nämlich durch

$$Sn = Z', \; mn = qC = X', \; nq = Cm = Y'.$$

Von diesen Coordinaten liegt Cq in der Linie der Nachtgleichen und zugleich mit Y′ in der Ebene der Ekliptik.

Nennen wir $\mathfrak{R}$ die Entfernung des Gestirns S von dem Puncte C, so ist $Z' = \mathfrak{R} \cdot \sin\beta$; $Cn = \mathfrak{R} \cdot \cos\beta$,

$Y' = \mathfrak{R} \cdot \cos\beta \cdot \sin\lambda$; $X' = \mathfrak{R} \cdot \cos\beta \cdot \cos\lambda$.

Ist nun ferner rulR der Himmelsäquator, N der eine Pol desselben, so können wir auch die Linien NC, CR, Cr als ein neues Coordinatensystem ansehen, und die Lage des Gestirns durch die Coordinaten X, Y, Z welche sich auf dieses neue System beziehen, ausdrücken. Es ist dann $X = X'$;

Digitized by Google

$Y = pq = oq - po = qn \cdot \cos e - tn$, weil $\mathfrak{W}. nqo = KCR = e =$ Schiefe der Ekliptik. Aus $Y = qn \cdot \cos e - tn$ folgt ferner $Y = Y' \cos e - Sn \cdot \sin e$, indem auch $tSn = e$ ist. Daher endlich $Y = Y' \cdot \cos e - Z' \cdot \sin e$. Ebenso ist $Z = St + pt = Sn \cdot \cos e + on = Z' \cdot \cos e + qn \cdot \sin e = Z' \cdot \cos e + Y' \sin e$.

Es sey ferner B der Ort des Beobachters auf der Erde, Z das Zenith desselben, $rl = A$ die Rectascension des Zeniths, z, y, x die dem letzten Coordinatensystem entsprechenden Coordinaten des Punctes B, $\mathfrak{W}. BCg = \varphi'$ die geographische Breite des Punctes B, der Halbmesser der Erde $= r$. Man hat daher $z = Bb = r \cdot \sin \varphi'$; $Cb = r \cdot \cos \varphi'$, $y = Cc = ab = r \cdot \cos \varphi' \cdot \sin A$; endlich $x = Ca = r \cdot \cos \varphi' \cdot \cos A$.

Es fragt sich nun, welches die Werthe von $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ sind. Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir, um die Figur 42. nicht zu sehr zu verwirren, die Coordinaten X, Y, Z, x, y, z in einer besondern Figur (Figur 43.) dar, in welcher $Sn = Z$, $qn = X$, $mn = Y$, $ur = z$, $rf = y$, $rg = x$, $\gamma us = orn = \alpha'$, $uS = \mathfrak{R}'$, $Sus = \delta'$, $Z - z = Sn - ur = Sn - sn$; $Z - z = Ss = \mathfrak{R}' \sin \delta'$. (I.) und $us = \mathfrak{R}' \cos \delta'$.

Ferner $X - x = qn - pq = pn = u\gamma = us \cdot \cos \alpha'$; $X - x = \mathfrak{R}' \cos \delta' \cdot \cos \alpha'$ (II.)

$Y - y = wq - wg = gq = \gamma s$; $Y - y = R' \cos \delta' \cdot \sin \alpha'$ (III.)

Dieses Ss, $u\gamma$, $s\gamma$ sind also die Coordinaten, welche den scheinbaren Ort des Gestirns in Beziehung auf den Aequator bestimmen.

Aus Gleichung II. und III. folgt: $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{Y - y}{X - x}$; aus I. und II. folgt: $\operatorname{tg} \delta' = \frac{Z - z}{X - x} \cos \alpha'$. Endlich aus

Digitized by Google

II.: $\frac{1}{\mathfrak{R}'} = \frac{\cos \delta' \cdot \cos \alpha'}{X - x}$; oder $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{R} \cdot \cos \delta' \cdot \cos \alpha'}{X - x}$.

Wenn ein Gestirn S (Fig. 44.) aus dem Horizonte BS in die Höhe S′ steigt, so wird die Entfernung BS gröfser seyn, als die Entfernung BS′. Das Gestirn wird uns also in S′ gröfser erscheinen müssen, als in S. Es sey ϱ der Halbmesser des Gestirns in S, ϱ' der Halbmesser desselben in S′, $BS = CS = \mathfrak{R}$, $BS' = \mathfrak{R}'$. Es wird also die Proportion statt finden:

$$\varrho' : \varrho = \mathfrak{R} : \mathfrak{R}', \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \varrho'}{\sin \varrho} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'}.$$

§. 87.

Substituiren wir nun in der Gleichung $\text{tg } \alpha' = \frac{Y - y}{X - x}$ die oben gefundenen Werthe für Y, y, X und x, so folgt:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{Y' \cdot \cos e - Z' \sin e - r \cdot \cos \varphi' \sin A}{X' - r \cdot \cos \varphi' \cdot \cos A}$$

Substituiren wir ferner die Werthe von Y′, X′, Z′, so kömmt:

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\mathfrak{R} \cdot \cos \beta \cdot \sin \lambda \cdot \cos e - \mathfrak{R} \cdot \sin \beta \cdot \sin e - r \cdot \cos \varphi' \sin A}{\mathfrak{R} \cdot \cos \beta \cdot \cos \lambda - r \cdot \cos \varphi' \cos A},$$

oder

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\cos \beta \cdot \sin \lambda \cdot \cos e - \sin \beta \cdot \sin e - \frac{r}{\mathfrak{R}} \cos \varphi' \sin A}{\cos \beta \cdot \cos \lambda - \frac{r}{\mathfrak{R}} \cos \varphi' \cos A}$$

In dem bei B rechtwinkligen Dreiecke BSC (Fig. 44.), in welchem wir den Winkel BSC, (d. h. die Horizontalparallaxe) durch π bezeichnen wollen, findet die Gleichung statt: $CS : \sin 90^\circ = CB : \sin \pi$ oder $\mathfrak{R} : 1 = r : \sin \pi$

$$\frac{r}{\mathfrak{R}} = \sin \pi.$$

Digitized by Google

Substituiren wir diesen Werth von $\frac{r}{\mathfrak{R}}$ in die Gleichung für tg α', und setzen wir der Kürze halber

$$\frac{1}{\cos\beta\cos\lambda - \sin\pi\,.\cos\varphi'\,.\cos A} = H,$$

so folgt:

$$\text{tg}\,\alpha' = H\,(\cos\beta\,.\sin\lambda\,.\cos e - \sin\beta\,.\sin e - \sin\pi\cos\varphi'\sin A) \quad \text{(I.)}$$

Nehmen wir nun auch in der Gleichung

$$\text{tg}\,\delta' = \frac{Z - z}{X - x}\cos\alpha'$$

diese Substitutionen vor, so kömmt:

$$\text{tg}\,\delta' = \frac{(Z'\,.\cos e + Y'\sin e - r\,.\sin\varphi')\cos\alpha'}{X' - r\,.\cos\varphi'\cos A}$$

$$\text{tg}\,\delta' = \frac{(\mathfrak{R}\,.\sin\beta\,.\cos e + \mathfrak{R}\,.\cos\beta\,.\sin\lambda\,.\sin e - r\,.\sin\varphi')\cos\alpha'}{\mathfrak{R}\cos\beta\cos\lambda - r\,.\cos\varphi'\cos A}$$

$$\text{tg}\,\delta' = \frac{(\sin\beta\,.\cos e + \cos\beta\,.\sin\lambda\,.\sin e - \frac{r}{\mathfrak{R}}\sin\varphi')\cos\alpha'}{\cos\beta\,.\cos\lambda - \frac{r}{\mathfrak{R}}\cos\varphi'\cos A}$$

$$\text{tg}\,\delta' = H\,(\sin\beta\,.\cos e + \cos\beta\,.\sin\lambda\,.\sin e - \sin\pi\,.\sin\varphi')\cos\alpha' \quad \text{(II.)}$$

Aus der Gleichung $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{R}\,.\cos\delta'\,.\cos\alpha'}{X - x}$ folgt endlich:

$$\frac{\sin\rho'}{\sin\rho} = \frac{\mathfrak{R}\,.\cos\delta'\,.\cos\alpha'}{\mathfrak{R}\,.\cos\beta\,.\cos\lambda - r\,.\cos\varphi'\cos A};$$

$$\sin\rho' = \cos\delta'\,.\cos\alpha'\,.\,H\,.\sin\rho \quad \text{(III.)}$$

Die Gleichungen I., II. und III. können wir nun leicht dahin umwandeln, dafs wir mit Hülfe derselben folgende Aufgaben auflösen können.

Digitized by Google

§. 88.

Erste Aufgabe.

Aus der wahren Länge und Breite (λ, β) die scheinbaren Gröfsen $\lambda' \beta'$ zu finden.

In diesem Falle müssen wir $e = o$ setzen und λ' statt α', β' statt δ', die Länge L des Zeniths statt der Rectascension A desselben, sowie die Breite B dieses Punctes statt der Polhöhe φ' in obige Formeln substituiren. Es ist dann

$$H = \frac{1}{\cos \beta \,.\, \cos \lambda - \sin \pi \cos B \cos L};$$

$$\operatorname{tg} \lambda' = H (\sin \lambda \,.\, \cos \beta - \sin \pi \,.\, \cos B \,.\, \sin L);$$

$$\operatorname{tg} \beta' = H \cos \lambda' (\sin \beta - \sin \pi \,.\, \sin B);$$

$$\sin \varrho' = H \cos \lambda' \,.\, \cos \beta' \sin \varrho$$

Die Werthe cos B . sin L und sin B finden wir aus A und φ' durch folgende Betrachtung. Durch das Zenith, den Pol des Aequators und den Pol der Ekliptik wird das sphärische Dreieck LPZ (Fig. 45.) gebildet, in welchem $LP = e$, $ZP = 90^\circ - \varphi'$, $LZ = 90 - B$, Winkel $LPZ = 90^\circ + A$, Winkel $PLZ = 90 - L$. Es findet daher die Gleichung statt:

$$\cos (90 - L) \sin (90 - B) = \cos (90 - \varphi') \sin e - \cos (90 + A) \sin (90 - \varphi') \cos e$$

Der $\sin L \,.\, \cos B = \sin \varphi' \sin e + \sin A \,.\, \cos \varphi' \,.\, \cos e$

Es findet ferner die Gleichung statt:

$$\cos (90 - B) = \cos (90 + A) \sin (90 - \varphi') \sin e + \cos (90 - \varphi') \cos e, \quad \text{oder:}$$

$$\sin B = \sin \varphi' \,.\, \cos e - \sin A \,.\, \cos \varphi' \,.\, \sin e$$

Substituiren wir die gefundenen Werthe von $\sin L \,.\, \cos B$ und sin B in die obigen Gleichungen für tg λ' und tg β', so folgt:

Digitized by Google

$$H = \frac{1}{\cos\lambda \cdot \cos\beta - \sin\pi \cdot \cos\varphi' \cos A};$$

$$\operatorname{tg}\lambda' = H\,(\sin\lambda \cdot \cos\beta - \sin\pi\,[\sin\varphi' \sin e + \cos\varphi' \cos e \cdot \sin A]);$$

$$\operatorname{tg}\beta' = H \cos\lambda'\,[\sin\beta - \sin\pi\,(\sin\varphi' \cos e - \cos\varphi' \sin e \cdot \sin A)].$$

Zweite Aufgabe.

Aus der wahren Rectascension und Declination (α und δ) die scheinbare Rectascension und Declination zu finden.

Zur Auflösung dieser Aufgaben setzen wir in den allgemeinen Formeln überall α, δ statt λ, β; und e setzen wir $= 0$. Wir erhalten dadurch die Formeln:

$$\frac{1}{H} = \cos\alpha \cos\delta - \sin\pi \cos\varphi' \cos A$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = H\,(\sin\alpha \cdot \cos\delta - \sin\pi \cos\varphi' \cdot \sin A)$$

$$\operatorname{tg}\delta' = H \cos\alpha'\,(\sin\delta - \sin\pi \sin\varphi')$$

$$\sin\varrho' = H \cos\alpha' \cdot \cos\delta' \sin\varrho$$

Dritte Aufgabe.

Aus der wahren Höhe h und dem wahren Azimuthe w die scheinbare Höhe h′ und das scheinbare Azimuth w′ zu finden.

In diesem Falle ist in den vier Gleichungen der zweiten Aufgabe $\varphi' = 90^0$, $A = 0$, $\alpha = w$, $\delta = h$, daher

$$\frac{1}{H} = \cos w \cos h$$

$$\operatorname{tg} w' = \frac{\sin w \cdot \cos h}{\cos w \cdot \cos h} = \operatorname{tg} w \text{ oder } w' = w$$

$$\operatorname{tg} h' = \frac{\cos w'\,(\sin h - \sin\pi)}{\cos w \cdot \cos h} = \operatorname{tg} h - \frac{\sin\pi}{\cos h}$$

Aus dieser letzten Gleichung können wir sofort $h - h'$, d. h. die Höhenparallaxe berechnen.

Digitized by Google

Es läfst sich dieselbe aber noch leichter durch die Betrachtung der Figur 41. finden. In derselben ist nämlich:

$$\sin BMC : BC = \sin MBC : CM,$$

oder:

$$\sin (h - h') : r = \sin MBZ : \mathfrak{R}$$
$$\sin (h - h') : r = \cos h' : \mathfrak{R}$$

oder näherungsweise

$$h - h' = \frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \cos h' = \sin \pi \cdot \cos h'; \; h - h' = \pi \cdot \cos . h'.$$

Es ist übrigens jetzt $\sin \varrho' = \frac{\sin \varrho \cdot \cos h'}{\cos h}$,

oder näherungsweise $\varrho' = \varrho \frac{\cos . h'}{\cos . h}$

§. 89.

Die Horizontalparallaxe π mufs natürlich für jeden einzelnen Weltkörper durch unmittelbare Beobachtung gefunden werden.

Das Verfahren, dessen man sich hierbei zu bedienen hat, wird aus Folgendem erhellen.

Es sey (Fig. 46.) S das Gestirn, dessen Horizontalparallaxe bestimmt werden soll, C der Mittelpunct der Erde, B und B′ zwei Puncte eines und desselben Erdmeridians, von denen der erstere auf der nördlichen, der zweite dagegen auf der südlichen Halbkugel der Erde liegt. Bei der Parallaxenbestimmung ist nun weiter Nichts erforderlich, als dafs zwei in B und B′ befindliche Beobachter den Eintritt des Gestirns in den Meridian erwarten, und die Zenithdistanzen $ZBS = z$ und $Z'B'S = z'$ messen. Für den Punct B ist die Declination von $S = \delta = SBA = ZBA - z =$ (Polhöhe von B) $- z = p - z$, weil Polhöhe und Declination des Zeniths eins

Digitized by Google

und dasselbe ist.*) Ebenso ist die Declination von S für den Punct $B' = A'B'S = \delta' = z' - Z'B'A' = z' - p'$

Wenn wir uns von B' nach A eine mit BS parallele Linie gezogen denken, so ist $\mathfrak{W}. SBA = \delta = BAB' = AB'A'$ und $BSB' = S = SB'A' - AB'A' = \delta' - \delta$ = der Summe der beiden Parallaxen BSC und CSB'.

Die einzelnen Parallaxen berechnen wir nun auf folgende Weise. Es ist $\frac{CB}{CS} = \frac{\sin f}{\sin z}$ wenn wir $\mathfrak{W}.$ BSC durch f bezeichnen. Ebenso ist: $\frac{CS}{CB'} = \frac{\sin z'}{\sin (S - f)}$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so folgt:

$1 = \frac{\sin f . \sin z'}{\sin z \sin (S - f)}$, weil $CB = CB'$ ist. Also:

$$1 = \frac{\sin f . \sin z'}{\sin z (\sin S \sqrt{1 - \sin^2 f} - \cos S \sin f)};$$

$\sin z \sin S \sqrt{1 - \sin^2 f} - \sin z \cos S \sin f = \sin f \sin z'$;

$\sin z . \sin S \sqrt{1 - \sin^2 f} = \sin f \sin z' + \sin z . \cos S . \sin f$;

$\sin^2 z \sin^2 S - \sin^2 z \sin^2 S . \sin^2 f = \sin^2 f \sin^2 z' + 2 \sin z \cos S . \sin z' \sin^2 f + \sin^2 z \cos^2 S . \sin^2 f$;

$\sin^2 z \sin^2 S = \sin^2 f (\sin^2 z' + 2 \sin z . \cos S . \sin z' + \sin^2 z \cos^2 S + \sin^2 z \sin^2 S)$;

$$\sin^2 f = \frac{\sin^2 z . \sin^2 S}{\sin^2 z' + 2 \sin z \cos S . \sin z' + \sin^2 z}$$

$$\sin f = \frac{\sin z . \sin S}{\sqrt{(\sin^2 z' + 2 \sin z . \cos S . \sin z' + \sin^2 z)}}$$

Weil aber der Winkel S immer äusserst klein ausfallen wird, so darf man $\cos S = 1$ setzen, daher

*) Es wird hier vorausgesetzt, dafs die Polhöhen von B und B' durch frühere Beobachtungen bereits gefunden seyen.

Digitized by Google

$$\sin f = \frac{\sin z \,.\, \sin S}{\sin z' + \sin z}$$

Bekannt mit dem Werthe von f berechnen wir nun die Entfernung des Gestirns nach der Formel

$$\frac{CS}{CB} = \frac{\mathfrak{R}}{r} = \frac{\sin z}{\sin f},$$

oder

$$\mathfrak{R} = \frac{r \,.\, \sin z \,.\, (\sin z' + \sin z)}{\sin z \,.\, \sin S} = \frac{r \,.\, (\sin z' + \sin z)}{\sin (\delta' - \delta)}$$

Substituiren wir diesen Werth von $\mathfrak{R}$ in die bekannte Gleichung:

$\sin \pi = \frac{r}{\mathfrak{R}}$, so folgt endlich $\sin \pi = \frac{\sin (\delta' - \delta)}{\sin z' + \sin z}$.

§. 90.

Die Verbesserung der Beobachtung durch die Höhen-Parallaxe ($\mathfrak{P}$) geschieht im entgegengesetzten Sinne der durch die Refraction $\mathfrak{R}$ veranlafsten, und wir erhalten als Schemata für die Zurückführung des scheinbaren auf den wahren Ort des Gestirns, oder seine Beziehung auf den Mittelpunct der Erde, je nachdem man Höhe oder Zenithdistanz gemessen hat:

$$h' = h - \mathfrak{R} + \mathfrak{P}$$
$$z' = z + \mathfrak{R} - \mathfrak{P}$$

Digitized by Google

Neunter Abschnitt.

Von der astronomischen Bestimmung der geographischen Breite.

§. 91.

Die geographische Breite, oder der Abstand eines Ortes vom Aequator, ist mit seiner Polhöhe einerlei. Denn nach Fig. 47. liegen uns, wenn wir uns in einem Puncte des Erdäquators AR befinden, beide Himmelspole N und S im Horizont.*) Begibt sich nun ein Beobachter vom Aequator weg, z. B. gegen den Nordpol hin bis in den Punct B, so wird HT sein Horizont, und der Nordpol N zeigt sich genau um so viel Grade über seinem Horizont im Norden, als er vom Aequator sich entfernt hat, nämlich um den Winkel NCT, welcher = ACB oder = der geographischen Breite von B ist. Denn es ist

$$\text{W. } ACN = ACB + BCN = 90^\circ$$

$$\text{W. } BCT = TCN + BCN = 90^\circ$$

Daher $ACB + BCN = TCN + BCN$, oder $ACB = TCN$.

In diesem Abschnitte wollen wir nun die vorzüglichsten Methoden angeben, deren man sich zur Bestimmung der Polhöhe oder der geographischen Breite eines Ortes bedienen kann.

*) Wir haben schon im §. 50. bemerkt, dafs es wegen der grofsen Entfernung der Fixsterne einerlei ist, ob wir uns unter dem Horizont eine Ebene denken, welche die Erdkugel an der Stelle des Beobachters berührt, oder ob wir uns darunter eine Ebene vorstellen, welche durch den Mittelpunct der Erde geht, und der ersteren Ebene parallel ist.

Digitized by Google

§. 92.

Erste Methode.

Es sey HZNT (Fig. 47.) der Meridian eines Ortes, Z das Zenith desselben, a r der Himmelsäquator, H a = Z N = Aequatorshöhe; Z N + Polhöhe = 90°, daher auch Aequatorshöhe + Polhöhe = 90°. Es ist 2 N T = p T + q T, daher N T = Polhöhe = $\frac{pT + qT}{2}$. Es bezeichnet nämlich q p den Tagekreis eines Circumpolarsterns.

Beispiel. Bestimmung der geographischen Breite von Göttingen aus zwei am 28. August 1820 daselbst genommenen Mittagshöhen des Sterns μ im Sternbilde des grofsen Bären.

Gröfste Mittagshöhe = 81°,39′,18″,1 = T q.
Refraction = 8,7

h = 81°,39′,9″,4

Kleinste Mittagshöhe = 21°,26′,55″,1 = T p.
Refraction = 28,5

h′ = 21° 26′ 26″,6
(h + h′) = 103°,5′,34″,0

Geograph. Breite von Göttingen = ½ (h + h′) = 51° 32′ 47″

§. 93.

Zweite Methode.

Es sey wiederum Fig. 48. N C T die Polhöhe, Z das Zenith, a C H die Aequatorhöhe, S ein Stern.

Hat man im Meridiane die Zenithdistanz ζ dieses Sterns = S Z mit einem nicht sehr genauen Instrumente beobachtet, so ist die verbesserte Zenithdistanz z =

ζ + Fehler des Instruments + Refraction. Wenn man ferner durch p die aus dem Sternverzeichnisse bekannte und

Digitized by Google

durch Präcession, Aberration und Nutation veränderte Poldistanz SN des Sterns, durch φ die Polhöhe, durch ψ den Bogen ZN bezeichnet, so ist für Culminationen auf der Südseite des Zeniths: $p - z = 90^0 - \varphi = \psi$, und auf der Nordseite des Zeniths für untere Culminationen $\psi = z - p$ und für obere Culminationen $\psi = z + p$. Nennt man also f den constanten Fehler des Instrumentes, r die Refraction und endlich ζ die am Instrumente abgelesene Zenithdistanz, so ist auf der Südseite:

$$\psi = p - \zeta - f - r \quad (I.)$$

Auf der Nordseite für untere Culminationen:

$$\psi = \zeta' + f + r' - p'; \quad (II.)$$

für obere Culminationen:

$$\psi = p'' + \zeta'' + f + r'' \quad (III.)$$

die halbe Summe von I und II gibt:

$$\psi = \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) - \tfrac{1}{2}(p' - p) + \tfrac{1}{2}(r' - r)$$

die halbe Summe von I und III =

$$\psi = \tfrac{1}{2}(\zeta'' - \zeta) + \tfrac{1}{2}(p'' + p) + \tfrac{1}{2}(r'' - r)$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, wie man die wahre Polhöhe ohne Kenntnifs der Gröfse f finden kann.

Die halbe Summe der Gleichungen II und III gibt:

$$\psi = \tfrac{1}{2}(\zeta'' + \zeta') + \tfrac{1}{2}(p'' - p') + \tfrac{1}{2}(r'' + r') + f$$

Hat man denselben Stern über und unter dem Pol beobachtet, so ist $p'' = p'$ und daher

$$\psi = \tfrac{1}{2}(\zeta'' + \zeta') + \tfrac{1}{2}(r'' + r') + f,$$

woraus man die Polhöhe des Beobachtungsortes ohne Kenntnifs der Poldistanzen der Sterne finden kann, wenn nur r', r'' und f genau bekannt sind.

Ist nebst der Polhöhe φ auch der Collimationsfehler f des Instrumentes unbekannt, so sind zwei Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Zeniths nöthig, um beide Gröfsen zu bestimmen. Es sey z die Zenithdistanz und δ die

Digitized by Google

Declination des auf der Südseite des Zeniths beobachteten Gestirns, und ebenso z', δ' die Zenithdistanz und Declination des auf der Nordseite des Zeniths beobachteten Gestirns. Wäre der Collimationsfehler Null, so würde $\varphi = z + \delta + r$ seyn; und ebenso auch für obere Culminationen des andern Sterns $\varphi = \delta' - z' - r'$. Denn die Entfernung des Zeniths von dem Puncte, wo der Meridian den Aequator schneidet, ist = der Polhöhe. Gibt aber z. B. das Instrument alle Zenithdistanzen um die constante Gröfse f zu klein, wo also f offenbar der Collimationsfehler ist, so ist

$$f = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) - \tfrac{1}{2}(z' + z) - \tfrac{1}{2}(r' + r),$$

weil $\varphi = z + \delta + r + f = \delta' - z' - r' - f$.

§. 94.

Dritte Methode.

Die vorhergehenden Methoden, die geographische Breite zu bestimmen, setzten voraus, dafs die Instrumente in der Mittagsebene des Beobachters aufgestellt seyen. Besitzet das Instrument diese Lage nicht, so kann man auf folgende Weise zur Kenntnifs der Polhöhe eines Ortes gelangen.

Es sey (Fig. 49.) HT der Horizont, HPZT der Meridian, P der Pol, Z das Zenith, K ein Stern, ZPK = s der Stundenwinkel, KP = Poldistanz des Sterns, ZK = 90° — Höhe = 90° — h, PZ = 90° — Polhöhe = 90° — φ. Es ergibt sich sodann aus dem sphärischen Dreiecke PZK

$$\sin h = \cos s \,.\, \cos \varphi \,.\, \sin p + \sin \varphi \,.\, \cos p \,.$$

Ist nun in dieser Gleichung blofs die Gröfse φ unbekannt, so sey

$$\operatorname{tg} x = \cos s \,.\, \operatorname{tg} p; \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos s \,.\, \sin p}{\cos p},$$

oder

$$\cos s \,.\, \sin p = \frac{\sin x \,.\, \cos p}{\cos x},$$

Digitized by Google

daher

$$\sin h = \frac{\cos \varphi \,.\, \sin x \,.\, \cos p}{\cos x} + \sin \varphi \,.\, \cos p,$$

oder

$$\sin h \,.\, \cos x = \cos \varphi \,.\, \sin x \,.\, \cos p + \sin \varphi \,.\, \cos p \,.\, \cos x;$$

daher

$$\sin h \,.\, \cos x = \cos p \,(\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \,.\, \cos x);$$

$$\sin h \,.\, \cos x = \cos p \,.\, \sin (\varphi + x),$$

oder

$$\sin (\varphi + x) = \frac{\sin h \,.\, \cos x}{\cos p}$$

Wenn uns aber der Werth von $\sin (\varphi + x)$ bekannt ist, so ist es auch der Werth von $(\varphi + x) = M$. In dieser Gleichung $\varphi + x = M$ ist blofs φ unbekannt, daher $\varphi = M - x$.

Hat man zwei correspondirende Höhen genommen, so geben diese die Zeit der Culmination des Sterns und den Stundenwinkel, welcher zu jeder Höhe gehört, also die zur Auflösung dieser Aufgabe nöthigen Stücke.

§. 95.

Vierte Methode.

Wenn die Polhöhe eines Ortes schon nahe bekannt ist, und man will sie nur genauer bestimmen, so ist folgende Methode hierzu besonders geeignet. Man beobachtet in einer Nacht mehrere Höhen eines Gestirns vor und nach der Culmination, und zwar nahe am Meridian. Reducirt man die beobachteten Höhen auf diejenige, welche im Augenblicke der Culmination selbst statt findet, so erhält man dadurch eben so viele mittägliche Höhen, d. h. eben so viele Bestimmungen der Polhöhe, als man Höhenbeobachtungen hat. Diese Reduction auf den Meridian kann auf folgende Weise vorgenommen werden.

Digitized by Google

Es sey im Allgemeinen $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$, so ist auch $z = \frac{\sin a + \sin (a-b) \cos a - \cos (a-b) \sin a}{\cos a}$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für $\sin (a-b)$ und $\cos (a-b)$ ihre nach Potenzen von $(a-b)$ entwickelten Werthe, so erhält man:

$$z = (a-b) - \frac{(a-b)^3}{1.2.3} + \frac{(a-b)^2}{1.2} \operatorname{tg} a - \ldots$$

oder

$$z = (a-b) + \frac{(a-b)^2}{1.2} \operatorname{tg} a - \frac{(a-b)^3}{1.2.3} - \ldots$$

Kehren wir diese Reihe um, so kömmt:

$$a - b = z - \frac{\operatorname{tg} a}{1.2} z^2 + \left[\frac{2 \operatorname{tg}^2 a}{(1.2)^2} + \frac{1}{1.2.3}\right] z^3 - \ldots$$

$$= z - \frac{z^2}{1.2} \operatorname{tg} a + \frac{z^3}{1.2.3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 a) - \ldots$$

Die Höhe h eines Gestirns, zu welchem der Stundenwinkel s, die Polhöhe φ und die Declination δ gehört, wird bekanntlich durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \,.\, \cos s$$

Ist aber h' die mittägliche Höhe dieses Gestirns, und $h' - h = dh$, so ist $h = h' - dh$, h' ist aber $= 90^0 - \varphi + \delta$, also $h = 90^0 - \varphi + \delta - dh$. Statt der obigen Gleichung für sin h können wir demnach auch schreiben:

$$\cos (\varphi - \delta + dh) = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \,.\, \left(\sin \frac{s}{2}\right)^2,$$

indem bekanntlich $\cos s = 1 - 2 \left(\sin \frac{s}{2}\right)^2$ ist.

Wenn wir die ganze Gleichung durch $\sin (\varphi - \delta)$ dividiren, so erhalten wir ferner:

Digitized by Google

$$\frac{\cos(\varphi-\delta)-\cos(\varphi-\delta+dh)}{\sin(\varphi-\delta)} = \frac{2\,.\,\cos\varphi\,.\,\cos\delta\,.\,\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2}{\sin(\varphi-\delta)}$$

Vergleichen wir nun diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$, so ist $a = 90^0 - \varphi + \delta$, $b = 90^0 - \varphi + \delta - dh$, $z = 2m\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2$, indem wir $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} = m$ setzen.

Also hat man auch

$$dh = +2m\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2 - 2m^2\left(\sin\frac{s}{2}\right)^4\cot(\varphi-\delta) + 4m^3\left(\sin\frac{s}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{3}+\cot^2(\varphi-\delta)\right) - \ldots \text{ oder}$$

$$dh = +2m\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2 \text{ (I.) (näherungsweise.)}$$

Dieſs ist der gesuchte Werth der Reduction der aufser dem Meridian beobachteten Höhen auf die mittägige Höhe. Er gilt unverändert, wenn der Stern auf der Südseite des Zeniths culminirt. Findet die Culmination zwischen Pol und Zenith statt, so ist $h' = 90^0 + \varphi - \delta$; $m = \frac{\cos\varphi\,.\,\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$, daher

$$dh = 2m\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2 - 2m^2\left(\sin\frac{s}{2}\right)^4\cot(\delta-\varphi) + 4m^3\,.\left(\sin\frac{s}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{3}+\cot^2(\delta-\varphi)\right) \ldots\ldots \text{(II.)}$$

Findet die Culmination unterhalb des Pols statt, so ist

$h' = \varphi + \delta - 90$ und $m = \frac{\cos\varphi\,.\,\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)}$.

Es ist demnach

$$dh = 2m\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2 - 2m^2\left(\sin\frac{s}{2}\right)^4\cot(\varphi+\delta) + 4m^3\left(\sin\frac{s}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{3}+\cot^2(\varphi+\delta)\right) + \ldots \text{(III.)}$$

Digitized by Google

Der aus I oder II gefundene Werth von dh wird zu h addirt, der aus III gefundene aber von h subtrahirt, um die mittägliche Höhe h′ zu erhalten.

Wenn man die Höhen nahe am Meridian genommen hat, so gewährt meistens schon der erste Theilsatz von dh hinreichende Genauigkeit.

Dieses erste Glied kann man sehr bequem mittels der nachstehenden Tafel berechnen, welche mit dem Argumente s in Zeit die Gröfse $\frac{2\left(\sin\frac{s}{2}\right)^2}{\sin 1''}$ in Bogensecunden gibt. Da wir nämlich die Gröfse dh in Secunden haben wollen, so müssen wir ihren Werth durch sin 1″ dividiren. (Vergl. S. 15 die Anmerkung.)

Digitized by Google

"	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′
0	0″,0	2″,0	7″,8	17″,7	31″,4	49″,1	70″,7
1	0,0	2,0	8,0	17,9	31,7	49,4	71,1
2	0,0	2,1	8,1	18,1	31,9	49,7	71,5
3	0,0	2,2	8,2	18,3	32,2	50,1	71,9
4	0,0	2,2	8,4	18,5	32,5	50,4	72,3
5	0,0	2,3	8,5	18,7	32,7	50,7	72,7
6	0,0	2,4	8,7	18,9	33,0	51,1	73,1
7	0,0	2,4	8,8	19,1	33,3	51,5	73,5
8	0,0	2,5	8,9	19,3	33,5	51,7	73,9
9	0,0	2,6	9,1	19,5	33,8	52,1	74,3
10	0,1	2,7	9,2	19,7	34,1	52,4	74,7
11	0,1	2,7	9,4	19,9	34,4	52,7	75,1
12	0,1	2,8	9,5	20,1	34,6	53,1	75,5
13	0,1	2,9	9,6	20,3	34,9	53,4	75,9
14	0,1	3,0	9,8	20,5	35,2	53,8	76,3
15	0,1	3,1	9,9	20,7	35,5	54,1	76,7
16	0,1	3,1	10,1	20,9	35,7	54,5	77,1
17	0,2	3,2	10,2	21,2	36,0	54,8	77,5
18	0,2	3,3	10,4	21,4	36,3	55,1	77,9
19	0,2	3,4	10,5	21,6	36,6	55,5	78,3
20	0,2	3,5	10,7	21,8	36,9	55,8	78,8
21	0,3	3,6	10,8	22,0	37,2	56,2	79,2
22	0,3	3,7	11,0	22,3	37,4	56,5	79,6
23	0,3	3,8	11,1	22,5	37,7	56,9	80,0
24	0,3	3,8	11,3	22,7	38,0	57,3	80,4
25	0,3	3,9	11,5	22,9	38,3	57,6	80,8
26	0,4	4,0	11,6	23,1	38,6	58,0	81,3
27	0,4	4,1	11,8	23,4	38,9	58,3	81,7
28	0,4	4,2	11,9	23,6	39,2	58,7	82,1
29	0,5	4,3	12,1	23,8	39,5	59,0	82,5

Digitized by Google

"	7′	8′	9′	10′	11′	12′
0	96″,2	125″,7	159″,0	196″,3	237″,5	282″,7
1	96,9	126,2	159,6	197,0	238,3	283,5
2	97,1	126,7	160,2	197,6	239,0	284,2
3	97,6	127,2	160,8	198,3	239,7	285,0
4	98,1	127,8	161,4	198,9	240,4	285,8
5	98,5	128,3	162,0	199,6	241,2	286,6
6	99,0	128,8	162,6	200,3	241,9	287,4
7	99,4	129,4	163,2	200,9	242,6	288,2
8	99,9	129,9	163,8	201,6	243,3	289,0
9	100,4	130,4	164,4	202,2	244,1	289,8
10	100,8	131,0	165,0	202,9	244,8	290,6
11	101,3	131,5	165,6	203,6	245,5	291,4
12	101,8	132,0	166,2	204,2	246,2	292,2
13	102,3	132,6	166,8	204,9	247,0	293,0
14	102,7	133,1	167,4	205,6	247,7	293,8
15	103,2	133,6	168,0	206,3	248,5	294,6
16	103,7	134,2	168,6	206,9	249,2	295,4
17	104,2	134,7	169,2	207,6	249,9	296,2
18	104,6	135,3	169,8	208,3	250,7	297,0
19	105,1	135,8	170,4	208,9	251,4	297,8
20	105,6	136,4	171,0	209,6	252,2	298,6
21	106,1	136,9	171,6	210,3	252,9	299,4
22	106,6	137,4	172,2	211,0	253,6	300,2
23	107,0	138,0	172,9	211,6	254,4	301,0
24	107,5	138,5	173,5	212,3	255,1	301,8
25	108,0	139,1	174,1	213,0	255,9	302,6
26	108,5	139,6	174,7	213,7	256,6	303,5
27	109,0	140,2	175,3	214,4	257,4	304,3
28	109,5	140,7	175,9	215,1	258,1	305,1
29	110,0	141,3	176,6	215,8	258,9	305,9

Digitized by Google

"	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′
30	0″,5	4″,4	12″,3	24″,0	39″,8	59″,4	83″,0
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,4	83,2
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	90,8
49	1,3	6,5	15,6	28,6	45,5	66,4	91,2
50	1,4	6,6	15,8	28,8	45,9	66,8	91,7
51	1,4	6,7	15,9	29,1	46,2	67,2	92,1
52	1,5	6,8	16,1	29,4	46,5	67,6	92,6
53	1,5	7,0	16,3	29,6	46,8	68,0	93,0
54	1,6	7,1	16,5	29,9	47,1	68,3	93,5
55	1,6	7,2	16,7	30,1	47,5	68.7	93,9
56	1,7	7,3	16,9	30,4	47,8	69,1	94,4
57	1,8	7,5	17,2	30,6	48,1	69,5	94,8
58	1,8	7,6	17,3	30,9	48,4	69,8	95,3
59	1,9	7,7	17,5	31,1	48,8	70,3	95,7
60	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2

Digitized by Google

"	7′	8′	9′	10′	11′	12′
30	110″,4	141″,8	177″,2	216″,4	259″,6	306″,7
31	110,9	142,4	177,8	217,1	260,4	307,5
32	111,4	143,0	178,4	217,8	261,1	308,4
33	111,9	143,5	179,0	218,5	261,9	309,2
34	112,4	144,1	179,7	219,2	262,6	310,0
35	112,9	144,6	180,3	219,9	263,4	310,8
36	113,4	145,2	180,9	220,6	264,1	311,6
37	113,9	145,8	181,6	221,3	264,9	312,5
38	114,4	146,3	182,2	222,0	265,7	313,3
39	114,9	146,9	182,8	222,7	266,4	314,2
40	115,4	147,5	183,4	223,4	267,2	315,0
41	115,9	148,0	184,1	224,1	267,9	315,8
42	116,4	148,6	184,7	224,8	268,7	316,6
43	116,9	149,2	185,4	225,3	269,5	317,4
44	117,4	149,7	186,0	226,2	270,2	318,3
45	117,9	150,3	186,5	226,9	271,0	319,1
46	118,4	150,9	187,3	227,6	271,8	319,9
47	118,9	151,5	187,9	228,3	272,6	320,8
48	119,5	152,0	188,5	229,0	273,3	321,6
49	120,0	152,6	189,2	229,7	274,1	322,4
50	120,5	153,2	189,8	230,4	274,9	323,3
51	121,0	153,8	190,5	231,1	275,6	324,1
52	121,5	154,4	191,1	231,8	276,4	325,0
53	122,0	154,9	191,8	232,5	277,2	325,8
54	122,5	155,5	192,4	233,3	278,0	326,7
55	123,1	156,1	193,1	234,0	278,9	327,5
56	123,6	156,7	193,7	234,7	279,5	328,4
57	124,1	157,3	194,4	235,4	280,4	329,2
58	124,6	157,8	195,0	236,1	281,1	330,0
59	125,1	158,4	195,7	236,8	281,9	330,9
60	125,7	159,0	196,3	237,5	282,7	331,8

Digitized by Google

Zehnter Abschnitt.

Von der astronomischen Bestimmung der geographischen Länge.

§. 96.

Die Culmination der Sonne bezeichnet bekanntlich denjenigen Zeitmoment, welcher zwischen den Anfang und das Ende des Tages in die Mitte fällt. Da nun die Sonne bei ihrem täglichen, in der Richtung von Osten nach Westen erfolgenden Kreislauf nur nach und nach in alle Meridiane der Erde tritt, so wird auch in allen Orten der Erde, welche nicht in einem und demselben Meridiane liegen, beständig eine verschiedene Uhrzeit statt finden. Wenn es z. B. hier in Darmstadt eben 12 Uhr Mittags ist, so hat man in einem um 15 Grade östlicher liegenden Orte bereits 1 Uhr, in einem um 30° östlicher liegenden bereits 2 Uhr und sofort, weil die Sonne in dem ersteren Orte eine Stunde früher, und in dem letzteren Orte zwei Stunden früher culminirte, als in Darmstadt. Der Unterschied der geographischen Länge zweier Orte, d. h. der Winkel, welchen die Meridiane derselben mit einander bilden, wird also dem Unterschiede der wahren, oder der mittleren, oder auch der Sternzeit proportional seyn, die man an beiden Orten in demselben Augenblicke zählt. Diese Zeiten findet man in jedem dieser Orte durch die Berichtigung der Uhr mittels Beobachtung correspondirender

Digitized by Google

Höhen. Es kommt also bei der Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte lediglich darauf an, zu erfahren, wie viel Uhr man an beiden Orten in einem und demselben Zeitmomente zählt. Zu diesem Zwecke mufs man sich an einem jeden dieser Orte genau die Uhrzeit einer momentanen, an beiden Orten zugleich sichtbaren Erscheinung bemerken, und die Zeitangaben der Uhren späterhin mit einander vergleichen. Zu solchen momentanen Erscheinungen gehören z. B. Pulversignale, welche an einem hohen Puncte zu verabredeter Zeit gegeben werden, ferner die Hauptmomente in den Verfinsterungen des Mondes und der Jupitertrabanten u. s. f. Bei den letzteren beobachtet man sowohl die Eintritte in den Schatten des Planeten, als ihre Austritte aus demselben. Indem man diese Beobachtungen einzeln mit einander vergleicht, erhält man einen mittleren Werth des Längenunterschiedes.

Am einfachsten bestimmt man die Längen mit Hülfe einer sehr genauen Uhr, welche, wenn sie einmal nach einem bestimmten Meridiane regulirt ist, dem Beobachter, wohin er sich auch begeben möge, die Zeit jenes Normalmeridians aufbewahrt. Aufser dieser Uhr braucht der Beobachter keine zweite mit sich zu führen, um daran an dem Orte, dessen geographische Lage bestimmt werden soll, die diesem Orte entsprechende Zeit zu bestimmen, sondern es ist nur jene eine Uhr nöthig, indem man ihre Zeigerstellung im Augenblicke des wahren Mittags durch Beobachtung correspondirender Sonnenhöhen ermittelt.

§. 97.

Wenn wir nicht im Besitze einer sehr guten Uhr sind, so bietet die sehr schnelle eigenthümliche Bewegung des Mondes, womit derselbe unaufhörlich seine Lage gegen die

Digitized by Google

übrigen Himmelskörper ändert, ein stets anwendbares Mittel dar, um geographische Längen zu bestimmen. Man hat nämlich Tafeln über den Abstand des Mondes von der Sonne von drei zu drei Stunden nebst der zugehörigen Zeit eines Normalmeridians entworfen.*) Hat man nun mittels eines Spiegelsextanten die Entfernung beider Himmelskörper gemessen, und den Augenblick der Beobachtung an einer Uhr bemerkt, die zuvor nach der Zeit des Ortes, dessen Länge bestimmt werden soll, regulirt worden ist, so sucht man die beobachtete Mondsdistanz (D) in den Tafeln auf, und vergleicht die dabei befindliche Zeitangabe des Normalmeridians mit der Zeit des Beobachtungsortes. Die Differenz der beiden Zeitangaben, in Bogen verwandelt, ist der gesuchte Längenunterschied.

Da die Mondsdistanzen nur von 3 zu 3 Stunden berechnet worden sind, so wählt man die zunächst höhere, welche wir F, und die zunächst niedrigere, welche wir G nennen wollen, und schliefst, indem man die Aenderung der Mondsdistanz der Zeit proportional betrachtet, auf den Augenblick, in welchem D eintrat, nach der Gleichung:

$$F - G : F - D = 3 \text{ Stunden} : t$$
$$= 10800'' \quad : t$$

Den Werth von t, zur Zeitangabe der Mondsdistanz F, wenn sie die frühere ist, addirt, und im umgekehrten Falle von ihr subtrahirt, verschafft uns also die Zeit des Normalmeridians, welche dem Augenblicke der Beobachtung entspricht, und, mit der beobachteten Uhrzeit verglichen, den Längenunterschied beider Meridiane ergibt.

Es darf jedoch hierbei nicht unberücksichtigt bleiben, dafs

*) Dergleichen Tafeln finden sich in der Pariser Connaissance des tems, in Schumachers Ephemeris of the Moon's Distances etc.

Digitized by Google

die durch unmittelbare Beobachtung gewonnene Gröfse D blofs die scheinbare Mondsdistanz ist, und dafs wir eigentlich die wahre Mondsdistanz D', oder denjenigen Winkel, welchen die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes am Centrum der Erde bilden, suchen müssen. Es mufs daher eigentlich folgendes Verfahren eingeschlagen werden.

In demselben Augenblicke, wo ein Beobachter mittels eines Spiegelsextanten die Entfernung des Sonnenrandes von dem Mondrande mifst, müssen zwei Gehülfen desselben die Höhen beider Himmelskörper beobachten. Wenn man zu den beobachteten Winkeln noch den scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes addirt, so erhält man also die scheinbaren Höhen und die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes. Die wahre Entfernung der Mittelpuncte finden wir vermöge dieser drei Werthe und der leicht abzuleitenden wahren Höhen*) durch folgende trigonometrische Betrachtung, welche sich auf ein, durch die Verbindung des Zeniths mit Mond und Sonne gebildetes sphärisches Dreieck ZMS (Fig. 50.) bezieht. In diesem Dreieck erscheint der Ort des Sonnenmittelpunctes (S) zu hoch, weil die Wirkung der Strahlenbrechung die widerstreitende der Parallaxe bei weitem übersteigt, der Mond (M) hingegen, dessen Parallaxe immer die Refraction übersteigt, dem Auge an der Erdoberfläche niedriger, als von ihrem Centrum aus gesehen. Die wahren Oerter beider Himmelskörper liegen aber mit den scheinbaren in denselben Verticalkreisen, wodurch also zwei sphärische Dreiecke ZMS und ZM'S' entstehen, deren Seiten sämmtlich verschieden sind, die aber einen gemeinschaftlichen Winkel z enthalten. Es sey nun

*) S. §. 88. (dritte Aufgabe) und §. 90.

Digitized by Google

die beobachtete Mondsdistanz $MS = D$
die wahre Mondsdistanz $M'S' = D'$
die beobachtete Höhe des Mondes $MN = h$
die wahre Höhe des Mondes $M'N = h'$
die beobachtete Höhe der Sonne $SR = H$
die wahre Höhe derselben $S'R = H'$

Es ist daher:

$$\cos z = \frac{\cos D - \sin h \,.\, \sin H}{\cos h \,.\, \cos H};$$

$$\cos z = \frac{\cos D' - \sin h' \,.\, \sin H'}{\cos h' \,.\, \cos H'},$$

daher:

$$\frac{\cos D - \sin h \,.\, \sin H}{\cos h \,.\, \cos H} = \frac{\cos D' - \sin h' \,.\, \sin H'}{\cos h' \,.\, \cos H'}$$

oder endlich:

$$\cos D' = \frac{\cos h' \,.\, \cos H' (\cos D - \sin h \,.\, \sin H)}{\cos h \,.\, \cos H} + \sin h' \,.\, \sin H'$$

§. 98.

Von den so eben erwähnten Methoden der Längenbestimmung gewährt diejenige mittels Pulversignalen allerdings die gröfste Genauigkeit, allein sie ist doch nur auf nicht sehr weit von einander entfernte Orte anwendbar. Durch die Methoden der Längenbestimmung mittels des Chronometers und der Mondsdistanzen gelangt man dagegen zu keinen sehr genauen Resultaten, und es ist daher nothwendig, die Art und Weise kennen zu lernen, wie man eine Längendifferenz, welche auf eine der beiden zuletzt erwähnten Methoden gefunden wurde, zu verbessern im Stande ist. Für diesen Zweck sind die Sonnenfinsternisse und die Bedeckungen der Sterne durch den Mond, wenn sie mit Sorgfalt beobachtet werden, sehr geeignet.

Alle Rechnungsarten, welche sich auf diese Erschei-

Digitized by Google

nungen beziehen, sind auf die Bestimmung der scheinbaren Winkeldistanz der beiden sich bedeckenden Gestirne gegründet. Diese Distanz, in dem nämlichen Augenblick beobachtet, ist wegen der Parallaxe nicht dieselbe für alle Puncte der Erde, wo man die Finsternifs sehen kann.

Nehmen wir an, die Puncte des Raumes seyen auf drei rechtwinklige Axen bezogen, und die Ebene X Y falle mit der Ebene der Ekliptik zusammen.

Bezeichnen wir durch

l, λ die wahre Länge und Breite des Mondes, dessen Ort wir durch A bezeichnen wollen;

L, Λ sey die wahre Länge und Breite des bedeckten Sterns B, (oder der Sonne);

g, h die Rectascension und Declination des Zeniths;

n, q die Länge und die Breite des Zeniths;

ψ Ψ die Horizontalparallaxe des Mondes und die des bedeckten Gestirns;

r die Entfernung des Mittelpunctes der Erde von dem Mittelpuncte des Mondes;

r′ die Entfernung des Beobachters von dem Mittelpuncte des Mondes;

ρ Halbmesser der Erde in die Breite H;

l″, λ″ die wahre Länge und Breite des Punctes C, in welchem eine Ebene die Himmelskugel berührt;

ω die Schiefe der Ekliptik;

Σ′ die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte der beiden Gestirne.

Endlich nehmen wir an, dafs die drei Puncte A, B und C in der nördlichen Halbkugel des Himmels liegen.

Digitized by Google

§. 99.

Wählen wir nun ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, und zwar ein solches, dessen Anfangspunct wiederum mit dem Mittelpuncte O der Erde zusammenfällt*), und in welchem die Axe der $x_{,,}$ gegen einen Punct C der Himmelskugel, dessen Länge und Breite wir durch l'', λ'' bezeichnen, gerichtet ist. Als Axe der $y_{,,}$ nehmen wir die Linie OD an, welche in der Ebene der Ekliptik liegt, und mit OZ einen rechten Winkel bildet. Zur Axe der $z_{,,}$ nehmen wir die Linie OE, welche auf die Ebene der $x_{,,}$ $y_{,,}$ senkrecht ist.

Wenn wir nun durch den Anfangspunct O der Coordinaten eine gerade Linie ziehen, welche dem scheinbaren Radius Vector r' des Mondes gleich und parallel ist, so sind die Gleichungen dieser letzteren Parallellinie in Bezug auf die neuen Coordinaten:

$$y_{,,} = p' x_{,,} \ , \ z_{,,} = q' x_{,,}$$

Die Gleichungen des scheinbaren Rad. Vect. R' des bedeckten Gestirns sind:

$$y_{,,,} = P' x_{,,,} \ ; \ z_{,,,} = Q' x_{,,,}.$$

Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist also die trigonometrische Tangente des Winkels Σ', welchen die beiden Radii Vectores r' und R' mit einander bilden, oder die scheinbare**) Winkeldistanz der Mittelpuncte der beiden Gestirne

$$\text{(M.)} \quad \operatorname{tg} \Sigma' = \frac{\sqrt{(P'-p')^2 + (Q'-q')^2 + (P'q'-Q'p')^2}}{1 + P'p' + Q'q'}$$

*) s. Fig. 51.

**) Scheinbar nennen wir jeden cölestischen Gegenstand, wenn er von einem Puncte der Erdoberfläche betrachtet wird; wahr wird er genannt, wenn wir uns den Beobachter im Mittelpuncte der Erde denken.

Digitized by Google

ein Ausdruck, in welchem wir nur die Werthe von P', Q', p', q' zu substituiren brauchen, um die Gröfse der scheinbaren Winkeldistanz zu erhalten. Allein die Formel M ist noch, wie wir im Folgenden sehen werden, bedeutender Vereinfachungen fähig. Ehe wir jedoch diese Vereinfachungen vornehmen, wollen wir zuvor die Werthe von P', Q', p', q' aufsuchen.

§. 100.

Zuvörderst hat man

$$p' = \frac{y_{,,}}{x_{,,}}, \quad q' = \frac{z_{,,}}{x_{,,}}$$

Wenn man ferner durch $(r, x_{,,})$, $(r, y_{,,})$, $(r, z_{,,})$ die Winkel bezeichnet, welche der Rad. Vect. r mit den Axen $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ bildet; und durch a, b, c die Cosinusse dieser Winkel, so hat man offenbar, wegen der sphärischen Dreiecke ZAC, ZAD, ZAE, diese drei Gleichungen:

$$(1.)\begin{cases} a = \cos(r, x_{,,}) = \cos(l - l'') \cos\lambda \cos\lambda'' + \sin\lambda \sin\lambda'' \\ b = \cos(r, y_{,,}) = \sin(l - l'') \cos\lambda \\ c = \cos(r, z_{,,}) = \sin\lambda \cos\lambda'' - \cos(l - l'') \cos\lambda \sin\lambda'' \end{cases}$$

Auf die nämliche Weise erhalten wir drei andere Gleichungen und zwar für das Zenith des Beobachters:

$$(2.)\begin{cases} \alpha = \cos(\varrho, x_{,,}) = \cos(n - l'') \cos q \cos\lambda'' + \sin q \sin\lambda'' \\ \beta = \cos(\varrho, y_{,,}) = \sin(n - l'') \cos q \\ \gamma = \cos(\varrho, z_{,,}) = \sin q \cos\lambda'' - \cos(n - l'') \cos q \sin\lambda'' \end{cases}$$

Wenn wir nun die Radien r, r' und ϱ auf die Axen der $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ projiciren, so ist offenbar:

$$x_{,,} = ar - \alpha\varrho,$$
$$y_{,,} = br - \beta\varrho,$$
$$z_{,,} = cr - \gamma\varrho$$

Hieraus und aus dem Vorhergehenden folgt:

Digitized by Google

$$p' = \frac{y_{,,}}{x_{,,}} = \frac{br - \beta\varrho}{ar - \alpha\varrho}$$

$$q' = \frac{z_{,,}}{x_{,,}} = \frac{cr - \gamma\varrho}{ar - \alpha\varrho}$$

Wenn nun in dem Dreiecke Fig. 52. ϱ den Halbmesser der Erde, r die Entfernung des Mondes vom Mittelpuncte der Erde und ψ die Horizontalparallaxe des Mondes bezeichnet, so ist offenbar: $r \cdot \sin\psi = \varrho$, oder näherungsweise: $r \cdot \psi = \varrho$; daher $\frac{\varrho}{r} = \psi$. Es ist demnach auch

$$p' = \frac{b - \beta\psi}{a - \alpha\psi}, \text{ und } q' = \frac{c - \gamma\psi}{a - \alpha\psi}$$

Wenn wir ebenso durch A, B, C diejenigen Werthe der Gleichungen (1.) bezeichnen, welche wir erhalten, wenn wir statt der Länge und Breite des Mondes die Länge und Breite des bedeckten Gestirns setzen, d. h. wenn wir l in L und λ in Λ verwandeln, so findet man in Beziehung auf das bedeckte Gestirn:

$$P' = \frac{BR - \beta\varrho}{AR - \alpha\varrho} = \frac{B - \beta\Psi}{A - \alpha\Psi}$$

$$Q' = \frac{CR - \gamma\varrho}{AR - \alpha\varrho} = \frac{C - \gamma\Psi}{A - \alpha\Psi}$$

wo Ψ den Sinus der Horizontalparallaxe dieses Gestirns bezeichnet.

Man wird übrigens bemerken, dafs die beiden Systeme von Gleichungen (1.), (2.) folgenden Gleichungen Genüge leisten:

$$(3.)\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1\,,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos(r,\varrho) = \cos(l-n)\cos\lambda\cdot\cos q + \sin\lambda\cdot\sin q \end{cases}$$

§. 101.

Wir wollen nun suchen, die obigen allgemeinen Formeln einigermafsen zu vereinfachen. Nehmen wir zu diesem

Digitized by Google

Zwecke an, der Punct C falle mit dem Punct A, in welchem sich der Mond befindet, zusammen. Man hat in diesem Falle

$$l = l'', \lambda = \lambda'', \text{ also } a = 1, b = 0, c = 0$$

und

$$p' = \frac{-\beta\psi}{1-\alpha\psi}, \quad q' = \frac{-\gamma\psi}{1-\alpha\psi}$$

Diese beiden letzteren Werthe sind also die Wirkung der Parallaxe des in C stehenden Mondes.

Nehmen wir jetzt an, die Axe der $x_{''}$ gehe durch den Mittelpunct der Sonne; so hat man: $l'' = L$, $\lambda'' = A = 0$, und folglich $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ und $P' = \frac{-\beta\Psi}{1-\alpha\Psi}$

Was die Gleichungen (1.) (2.) anbelangt, so werden dieselben, wenn wir darin $l'' = L$ und $\lambda'' = 0$ setzen:

$$(1') \begin{cases} a = \cos(l - L)\cos\lambda \\ b = \sin(l - L)\cos\lambda \\ c = \sin\lambda \end{cases}$$

$$(2') \begin{cases} \alpha = \cos(n - L)\cos q \\ \beta = \sin(n - L)\cos q \\ \gamma = \sin q \end{cases}$$

Ungeachtet dieser Vereinfachungen würde die Formel (M) für die Ausübung doch noch viel zu complicirt seyn. Allein es ist leicht einzusehen, dafs jene Formel in Bezug auf die Sonnenfinsternisse auf folgende reducirt werden kann:

$$(M'). \quad tg\,\Sigma' = \sqrt{(p' - P')^2 + (q' - Q')^2}$$

ohne dafs dabei ein Fehler von 0″,1 begangen würde, weil $P'q'$ und $Q'q'$ sehr kleine Gröfsen sind.

§. 102.

Doch der Ausdruck (M′) läfst sich noch mehr vereinfachen.

Nach dem Vorhergehenden hat man in Bezug auf die Sonne:

Digitized by Google

$$p' - P' = \frac{b - \beta\psi}{a - \alpha\psi} + \frac{\beta\Psi}{1 - \alpha\Psi}$$

$$= \frac{b - \beta\psi + \beta\Psi\,(a - \alpha\psi)\,(1 - \alpha\Psi)^{-1}}{a - \alpha\psi}$$

$$= \frac{b - \beta\,(\psi - a\Psi)}{a - \alpha\psi};$$

indem man die Theilsätze der zweiten Ordnung, als sehr klein, vernachlässigt. Ebenso ist:

$$q' - Q' = \frac{c - \gamma\psi}{a - \alpha\psi} + \frac{\gamma\Psi}{1 - \alpha\Psi} = \frac{c - \gamma\,(\psi - a\Psi)}{a - \alpha\psi}$$

Da aber $a = \cos(l - L) \cdot \cos\lambda$ immer nur äusserst wenig von der Einheit verschieden ist, so kann man in dem Theilsatze $a\Psi$ den Coefficienten $a = 1$ setzen; man hat dann:

$$p' - P' = \frac{b - \beta\,(\psi - \Psi)}{a - \alpha\psi}$$

$$q' - Q' = \frac{c - \gamma\,(\psi - \Psi)}{a - \alpha\psi}$$

Aus der Gleichung M' folgt also:

$$(N).\ tg\,\Sigma' = \frac{\sqrt{[b - \beta\,(\psi - \Psi)]^2 + [c - \gamma\,(\psi - \Psi)]^2}}{a - \alpha\psi}$$

Diese Gleichung gibt die scheinbare Distanz der beiden Gestirne mit einer Genauigkeit, welche in allen Fällen hinreicht, sowohl bei den Sonnenfinsternissen, als auch bei den Bedeckungen der Sterne durch den Mond.

§. 103.

Bei den Sternbedeckungen mufs man die Axe der $x_{,,}$ nach dem bedeckten Sterne richten, ebenso wie wir uns vorhin bei den Sonnenfinsternissen die Axe der $x_{,,}$ durch den Mittelpunct der Sonne gezogen dachten, und man hat alsdann: $l'' = L$, $\lambda'' = \Lambda$. Setzt man $l - L = t$, $\lambda - \Lambda = u$,

Digitized by Google

so nehmen, was leicht einzusehen ist, die Gleichungen (1), (2) folgende Form an:

$$(1'') \quad \begin{cases} a = \cos u - 2 \sin {}^2\tfrac{1}{2} t \cos \Lambda \cos \lambda \text{ *)} \\ b = \sin t \,.\, \cos \lambda \\ c = \sin u + 2 \sin {}^2\tfrac{1}{2} t \sin \Lambda \cos \lambda \end{cases}$$

$$(2'') \quad \begin{cases} \alpha = \cos (n - L) \cos \Lambda \cos q + \sin \Lambda \sin q \\ \beta = \sin (n - L) \cos q \\ \gamma = \cos \Lambda \sin q - \cos (n - L) \sin \Lambda \,.\, \cos q; \end{cases}$$

und aufserdem hat man bei Fixsternen $\Pi = o$, (wo Π die Horizontalparallaxe bezeichnet.)

§. 104.

Am Anfang und am Ende einer Finsternifs scheinen sich die Scheiben der Gestirne zu berühren, und alsdann ist die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte von einander = der Summe der scheinbaren Halbmesser. Diese scheinbaren Halbmesser sind im Allgemeinen verschieden, nach Maasgabe der verschiedenen Höhen der Gestirne über dem Horizont, und es kann also die fragliche Summe, genau genommen, nicht dieselbe seyn, welche wir aus den astronomischen Tafeln erhalten. Diese kleine Veränderlichkeit der Halbmesser ist bei dem Monde am merklichsten, weil er der Erde am nächsten ist. Bei den übrigen Gestirnen kann sie vernachlässigt werden.

Es sey d der Halbmesser des Mondes, wie er in den Tafeln angegeben ist, d. h. am Horizont, und d′ sey der Halbmesser des Mondes, wenn er in einer bestimmten Höhe über dem Horizont steht. Wenn aufserdem r und r′ die Ent-

*) Denn es ist $\cos t \,.\, \cos \lambda \,.\, \cos \Lambda + \sin \lambda \,.\, \sin \Lambda$
$= (1 - 2 \sin {}^2\tfrac{1}{2} t) \cos \lambda \,.\, \cos \Lambda + \sin \lambda \,.\, \sin \Lambda$
$= \cos \lambda \,.\, \cos \Lambda + \sin \lambda \,.\, \sin \Lambda - 2 \sin {}^2\tfrac{1}{2} t \,.\, \cos \lambda \cos \Lambda.$

Digitized by Google

fernungen des Mittelpunctes des Mondes von dem Mittelpuncte der Erde und von dem Orte des Beobachters vorstellen, so hat man offenbar

$$\sin d' = \frac{r}{r'} \sin d$$

Den Werth von $\frac{r}{r'}$ finden wir auf folgende Art.

Man nehme den Mittelpunct C der Erde (Fig. 53.) zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, wobei die Axe der X durch den Frühlingsnachtgleichepunct geht, und die Axe der Y in der Ebene des Aequators liegt. Die Axe der Z geht dann durch den Nordpol dieses Kreises. Die Lage des Punctes E sey nun durch die Coordinaten CP, PM, ME gegeben.

Es seyen also x, y, z die Coordinaten des Mittelpuncts E eines Gestirns, welches in der nördlichen Halbkugel steht, r = CE sey seine Entfernung von dem Mittelpuncte der Erde; AR = HN seine Rectascension, D = EN seine Declination; man hat alsdann:

(α.) $x = r \cdot \cos AR \cdot \cos D$; $y = r \cdot \sin AR \cdot \cos D$; $z = r \cdot \sin D$

Ebenso seyen X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes auf der Oberfläche der Erde, in welchem sich der Beobachter befindet. g, h seyen die Rectascension und die Declination des Zeniths; man hat alsdann, wenn man den Halbmesser der Erde = ρ setzt:

(β) $X = \rho \cdot \cos g \cdot \cos h$, $Y = \rho \sin g \cdot \cos . h$, $Z = \rho \cdot \sin . h$

Endlich nehme man den Ort des Beobachters zum Anfangspuncte dreier andrer rechtwinkliger Axen, welche den ersteren parallel sind, und bezeichne hierauf durch r' die Entfernung des Beobachters von dem Sterne; durch AR' die scheinbare Rectascension und durch D' die scheinbare Declination dieses Gestirns, so hat man

Digitized by Google

(γ) $x' = r' \cos AR' \cos D'$, $y' = r' \sin AR' \cos D'$, $z' = r' \sin D'$.

Offenbar finden nun zwischen den Coordinaten des wahren und den Coordinaten des scheinbaren Ortes folgende Gleichungen statt:

$$(\delta) \quad x' = x - X, \; y' = y - Y, \; z' = z - Z,$$

oder in Beziehung auf α, β und γ

$$\left.\begin{aligned} r' \cos AR' \cos D' &= r \cos AR \,.\, \cos D - \varrho \cos g \,.\, \cos h \\ r' \sin AR' \cos D' &= r \,.\, \sin AR \,.\, \cos D - \varrho \sin g \,.\, \cos h \\ r' \sin D' &= r \sin D \qquad\quad - \varrho \sin h \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

Erheben wir eine jede dieser 3 Gleichungen aufs Quadrat, und summiren wir die Resultate, so finden wir

$$r'^2 = r^2 - 2 \,.\, r \,.\, \varrho \,[(\cos AR \,.\, \cos g + \sin AR \,.\, \sin g) \cos D \,.\, \cos h + \sin D \,.\, \sin h] + \varrho^2,$$

oder:

$$r'^2 = r^2 - 2 \,.\, r \,.\, \varrho \,[\cos (AR - g) \,.\, \cos D \,.\, \cos h + \sin D \,.\, \sin h] + \varrho^2,$$

oder mit Beziehung auf die Ekliptik:

$$r'^2 = r^2 - 2\varrho n \,[\cos (\lambda - n) \cos \lambda \cos \varphi + \sin \lambda \,.\, \sin \varphi] + \varrho^2,$$

oder nach (3) im §. 100,

$$r'^2 = r^2 - 2\varrho r \,.\, \cos (r, \varrho) + \varrho^2$$

oder

$$\frac{r'^2}{r^2} = 1 - 2 \frac{\varrho}{r} \cos (r, \varrho) + \frac{\varrho^2}{r^2}$$

oder

$$\frac{r'^2}{r^2} = 1 - 2 \psi \cos (r, \varrho) + \psi^2$$

Wenn man ferner in der Formel (N.) die sehr kleinen Theilsätze $\beta\Psi$ und $\gamma\Psi$ vernachlässigt, was unter den gegebenen Umständen erlaubt ist, so kömmt:

$$(a - \alpha\psi) \operatorname{tg} \Sigma' = \sqrt{(b - \beta\psi)^2 + (c - \gamma\psi)^2}$$
$$= \sqrt{(1 - a^2) + \psi^2 (1 - a^2) - 2\psi (\beta b + c\gamma)},$$

indem wir die Gleichungen (3.) berücksichtigen. — Aus der letzten Gleichung erhält man leicht:

Digitized by Google

$$(a-\alpha\psi)^2 \operatorname{tg}^2\Sigma' + (a-\alpha\psi)^2 = 1 - 2\psi(a\alpha + b\beta + c\gamma) + \psi^2;$$

$$(a-\alpha\psi)^2 \sec^2\Sigma' = 1 - 2\psi\cos(r,\rho) + \psi^2 = \frac{r'^2}{r^2}$$

also: $\frac{r'}{r} = (a-\alpha\psi)\sec\Sigma' = \frac{a-\alpha\psi}{\cos\Sigma'}$

endlich: $\sin d' = \frac{\sin d \,.\, \cos\Sigma'}{a-\alpha\psi}$

Es sey nun D der aus den Tafeln bekannte Halbmesser der Sonne, wenn dieselbe im Horizont steht, man hat alsdann zu Anfang wie zu Ende der Finsternifs: $\Sigma' = d' + D$ oder $\sin d' = \sin\Sigma'\cos D - \cos\Sigma'\sin D$.

Substituiren wir diesen Werth von $\sin d'$ in die vorige Gleichung, so erhält man endlich:

$$(P)\quad \operatorname{tg}\Sigma' = \operatorname{tg} D + \frac{\sin d}{(a-\alpha\psi)\cos D}$$

Die Formeln (N) und (P) erscheinen zwar schon unter ziemlich einfacher Gestalt. Um sich jedoch bei denselben mit Bequemlichkeit der Logarithmen bedienen zu können, ist es nothwendig, zuvor noch einige Transformationen mit ihnen vorzunehmen.

§. 105.

Anwendung auf die Sonnenfinsternisse.

Es sey $1 - L = t$; wir erhalten dann aus (1') und (3') die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} a = \cos t \,.\, \cos\lambda \\ b = \sin t \,.\, \cos\lambda \\ c = \sin\lambda \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} \alpha = \cos(n-L)\cos q \\ \beta = \sin(n-L)\cos q \\ \gamma = \sin q \end{cases}$$

und die Formel (N) kann, ohne dafs daraus ein merklicher Fehler hervorginge, so geschrieben werden:

Digitized by Google

$$(N)\ \text{tg}\,\Sigma' = \frac{\sqrt{[\sin t.\cos\lambda - \sin\beta(\psi - \Psi)]^2 + [\sin\lambda - \sin\gamma(\psi - \Psi)]^2}}{\cos t\,.\,\cos\lambda - \sin\alpha\,\psi}$$

Um abzukürzen sey

$$(3.)\quad \begin{cases} \sin t\,.\,\cos\lambda = \sin\tau \\ \beta\,(\psi - \Psi) = e \\ \gamma\,(\psi - \Psi) = f \\ \cos t\,\cos\lambda - \sin\alpha\psi = k\,. \end{cases}$$

Man hat alsdann mit Berücksichtigung der Kleinheit der Winkel:

$$(N')\ \text{tg}\,\Sigma' = \frac{\sqrt{(\sin\tau - \sin e)^2 + (\sin\lambda - \sin f)^2}}{k}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\cos\left(\frac{\tau + e}{2}\right)\sin(\tau - e)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\lambda + f}{2}\right)\sin(\lambda - f)\right]^2}}{k}$$

Setzt man also:

$$(4.)\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda + f)\,\sin(\lambda - f)}{\cos\frac{1}{2}(\tau + e)\,\sin(\tau - e)} = \text{tg}\,\vartheta$$

so hat man

$$(5.)\quad \text{tg}\,\Sigma' = \frac{\cos\frac{1}{2}(\tau + e)\,\sin(\tau - e)}{k\,.\,\cos\vartheta}$$

Was ferner die Formel (P) anbelangt, so verwandelt sich dieselbe, indem wir $a = \alpha\psi = k$ setzen, in folgende:

$$(6.)\quad \text{tg}\,\sigma' = \text{tg}\,D\left(1 + \frac{\sin d}{k\,\sin D}\right)$$

Mittels der Gleichung (5.) erhält man also die scheinbare Distanz Σ' der Mittelpuncte der beiden Gestirne bei der Annäherung oder während der Dauer der Finsternifs; und mittels der Gleichung (6.) erhält man die nämliche Distanz, wenn die Gestirne sich berühren.

Endlich wird noch bemerkt, dafs man die Länge und Breite des Zeniths, oder n und q, durch die Formeln findet:

Digitized by Google

$$\text{tg } n = \cos \omega \,.\, \text{tg } g + \frac{\sin \omega \,.\, \text{tg } h}{\cos g},$$

$$\cos q = \frac{\cos g \,.\, \cos h}{\cos n},$$

oder $\sin q = \sin h \,.\, \cos \varpi - \cos h \,.\, \sin \omega \,.\, \sin g.$

§. 106.

Die Formel (N) eignet sich dazu, die Fehler der Mondstafeln kennen zu lernen, wenn man an einem solchen Orte, dessen Länge man schon genau kennt, eine gute Beobachtung gemacht hat. Wenn man nämlich daselbst die Zeit der Immersion und die der Emersion beobachtet hat, so berechnet man mittels der Tafeln die Länge l und die Breite λ des Mondes, ebenso wie die übrigen Elemente*) der Formel (N), z. B. für die Zeit der Immersion; und bestimmt sofort, nach dem vorhergehenden Verfahren, die Werthe von Σ' und σ'. Wenn der eine von dem andern um eine Gröfse $d\Sigma'$ verschieden ist, so dafs $\sigma' = \Sigma' + d\Sigma'$, so drückt diese Gröfse $d\Sigma'$, welche offenbar positiv oder negativ seyn wird, je nachdem $\sigma' >$ oder $< \Sigma'$ ist, den Fehler in der Distanz aus, welcher durch die Fehlerhaftigkeit der Tafeln hervorgebracht wurde. Nehmen wir also an, die correspondirenden Fehler in der Länge und Breite seyen dt und $d\lambda$, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen diesen drei Fehlern, wenn man die Gleichung (N') differenziirt. Aber wir bemerken, dafs die kleinen Winkel e, f, ψ bei dieser Operation als constant angesehen werden können, weil sie sich in der That nicht merklich verändern. Der Nenner k ist daher ebenfalls als unveränderlich anzusehen.

*) Zu diesen Elementen gehört, wie wir wissen, auch die Länge der Sonne.

Digitized by Google

Mit Rücksicht auf die Kleinheit der Winkel hat man also für die Immersion:

$$\left.\begin{aligned} d\Sigma' \,.\, tg\,\Sigma' &= d\lambda \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos\left(\frac{\lambda + f}{2}\right) \,.\, \sin(\lambda - f)\, \frac{\cos^2\Sigma'}{k^2} \\ &+ dt \cos\lambda \,.\, \cos t \,.\, \cos\left(\frac{\tau + e}{2}\right) \sin(\tau - e)\, \frac{\cos^2\Sigma'}{k^2} \end{aligned}\right\} (7.)$$

Ebenso sey

$$\left.\begin{aligned} d\Sigma'' \,.\, tg\,\Sigma'' &= d\lambda\, \cos\lambda_{,} \cos\left(\frac{\lambda_{,} + f_{,}}{2}\right) \,.\, \sin(\lambda_{,} - f_{,})\, \frac{\cos^2\Sigma''}{k_{,}^2} \\ &+ dt \,.\, \cos\lambda_{,}\, \cos t_{,}\, \cos\left(\frac{\tau_{,} + e_{,}}{2}\right) \sin(\tau_{,} - e_{,})\, \frac{\cos^2\Sigma''}{k_{,}^2} \end{aligned}\right\} (8.)$$

die correspondirende Gleichung für die Emersion. Die Verbindung dieser beiden Gleichungen, in welchen wir die Cosinusse, welche von der Einheit wenig verschieden sind, = 1 setzen können, verschafft uns die Werthe der beiden Unbekannten dt und $d\lambda$; hernach findet man durch die stündliche Bewegung die Zeit der wahren Conjunction, und endlich genau die Länge und Breite des Mondes in diesem Zeitpunct.

Es seyen z. B. dl und dL die Bewegungen des Mondes und der Sonne während einer Stunde, und x der Zwischenraum der Zeit, welcher die beobachtete Phase*) von der wahren Conjunction scheidet; so hat man für die wahre Länge des Mondes in dieser Epoche $l + dt + x \,.\, dl$, weil dt der Fehler der Tafeln ist, und $x \,.\, dl$ die Bewegung während x Stunden. Ebenso hat man $L + x \,.\, dL$ für die correspondirende Länge der Sonne, folglich

$$x = \frac{l - L + dt}{dL - dl} = \frac{l - L + dt}{-\mu}$$

wo $\mu = dl - dL$ = der relativen stündlichen Bewegung in der Länge ist.

*) Immersion oder Emersion.

Digitized by Google

Auf diese Weise können wir also den Ort des Mondes für die Zeit der beobachteten Phase und für den Augenblick der Conjunction genau bestimmen.

§. 197.

Kennt man nun die Fehler der Tafeln, so ist es leicht, die geographische Länge eines Ortes zu erhalten, wo eine Beobachtung gemacht worden ist, welche einer von denen correspondirt, deren man sich zur Bestimmung der Fehler bedient hat. Mittels der Tafeln und der beinahe bekannten geographischen Länge des Ortes berechnet man die Länge, die Breite und die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte, für diesen Ort und für die beobachtete Phase*); allein es wird bei dieser Distanz ein Fehler stattfinden von dem Werthe $d\Sigma_{,,}$, und bei den Unterschieden der Länge und Breite der beiden Gestirne Fehler von dem Werthe $dt_{,,}$, $d\lambda_{,,}$, welche Fehler lediglich von der unrichtig angenommenen geographischen Länge herrühren. Bezeichnen wir also durch M die relative Bewegung in der Länge während einer Zeitsecunde und durch N die relative Bewegung in der Breite ebenfalls während einer Zeitsecunde, setzen wir ferner $dt_{,,} = M \,.\, d\varphi$, $d\lambda_{,,} = N \,.\, d\varphi$, wo $d\varphi$ den Fehler in der Zeit ausdrückt, welcher bei der gesuchten Meridiandifferenz begangen wurde, so hat man nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{aligned} d\Sigma_{,,}\,\mathrm{tg}\,\Sigma'' = N\,d\varphi\,.\,\cos\lambda_{,,}\cos\left(\frac{\lambda_{,,}+f_{,,}}{2}\right)\sin(\lambda_{,,}-f_{,,}).\frac{\cos^2\Sigma_{,,}}{k^2_{,,}} \\ + M d\varphi\cos\lambda_{,,}\cos t_{,,}\cos\left(\frac{\tau_{,,}+e_{,,}}{2}\right)\sin(\tau_{,,}-e_{,,})\frac{\cos^2\Sigma_{,,}}{k^2_{,,}} \end{aligned}\right\} (9.)$$

Substituiren wir hierin den auf die früher angegebene Weise

*) d. h. entweder für die Immersion oder für die Emersion.

Digitized by Google

gefundenen Werth der scheinbaren Entfernung der Mittelpuncte, so ist in dieser Gleichung nur noch die Gröfse $d\varphi$ unbekannt. Durch die Gleichung 9 kann also der Werth von $d\varphi$ gefunden werden. Nennen wir φ die angenommene Meridiandifferenz, in Zeit ausgedrückt, so ist also die gesuchte wahre Differenz $= \varphi + d\varphi = \varphi + \frac{dt_{,,}}{M}$.

§. 108.

Anwendung auf die Sternbedeckungen.

Wie schon oben angedeutet worden, mufs man bei der Berechnung der Länge mittels Sternbedeckungen sich das Coordinatensystem so gerichtet denken, dafs der Punct C mit dem bedeckten Sterne B zusammenfällt, und man hat alsdann $l'' = L$, $\lambda'' = \Lambda$. (s. §. 103.)

Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun der Formel N. eine solche Gestalt geben, in welcher sie auch auf Sternbedeckungen bequem anwendbar ist. Zu diesem Zwecke setzen wir $\beta(\psi + \Psi)$ oder $\sin(n - L)\cos . q(\psi - \Psi) = E$; b oder $\sin t . \cos\lambda = (t . \cos\lambda)\sin 1'' = \sin T$; $T = t . \cos\lambda$; c oder $\sin u + 2\sin^2\frac{1}{2}\ t \sin\Lambda\cos\lambda$ setzen wir

$= u . \sin 1'' + \frac{t^2}{2}\sin^2 1'' \sin\Lambda . \cos\lambda$

$= \sin 1''\left(u + \frac{t^2}{2}\sin 1''\sin\Lambda\cos\lambda\right)$

$= \sin V$, daher $V = u + \frac{t^2}{2}\sin 1''\sin\Lambda\cos\lambda$; $\gamma(\psi - \Psi)$ oder $(\psi - \Psi)[\sin q . \cos\Lambda - \cos(L - n)\cos q . \sin\Lambda]$ setzen wir $= \sin F$; a oder $\cos u - 2\sin^2\frac{1}{2}\ t\cos\Lambda\cos\lambda$ setzen wir $= \cos u - \frac{t^2}{2}\sin^2 1''\cos\lambda . \cos\Lambda = V'$. Endlich setzen wir $a - \alpha\psi = V' - \sin\psi\alpha = K$.

Digitized by Google

In den vorhergehenden Formeln muss man ausserdem $\Psi = 0$ setzen, weil bei den Fixsternen keine Parallaxe statt findet.

Man hat nunmehr:

$$\text{tg } \Sigma' = \frac{\sqrt{[\sin T - \sin E]^2 + [\sin V - \sin F]^2}}{K}$$

Mit dieser letzten Formel kann man ganz die nämlichen Transformationen vornehmen, wie mit der Formel N'. Sie erhält sodann die Gestalt:

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\Sigma' = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(T + E) \sin \tfrac{1}{2}(T - E)}{K \cos \Theta}, \text{ wo}$$

$$\text{tang. } \Theta = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(V + F) \sin \tfrac{1}{2}(V - F)}{\cos \tfrac{1}{2}(T + E) \sin \tfrac{1}{2}(T - E)} \text{ ist.}$$

Was die Formel 6. anbelangt, so muss in derselben, um sie bei Sternbedeckungen zu gebrauchen, k in K verwandelt werden.

Es ist alsdann: $\text{tg } \sigma' = \text{tg } D + \frac{\sin d}{K \cdot \cos D}$. Ausserdem hat man im gegenwärtigen Falle $D = 0$, folglich $\text{tg } \sigma' = \frac{\sin d}{K}$, oder einfacher $\sigma' = \frac{d}{K}$.

§. 109.

Beispiel.

Berechnung der Längendifferenz von Paris und Berlin mittels der Bedeckung eines Sterns.

Wir haben bei der folgenden Berechnung weniger den Zweck, sehr genaue Resultate zu erhalten, als vielmehr dem Leser den Weg zu zeigen, wie er die vorhergehende Methode anwenden soll. Wir nehmen als Beispiel die Bedeckung des Antares, beobachtet am 16. April 1749.

Digitized by Google

16. April 1749.	Zu Paris. Immersion.	zu Berlin. Immersion.	Emersion.
Wahre Zeit der Beobachtung.	13^h 1' 2" 0"	14^h 6' 19"	15^h 12' 54"

Aber zu jener Zeit wußte man schon, daß die östliche Länge Berlins von Paris beinahe = 44' 4" (in Zeit) ist; also

16. April 1749.	Zu Paris. Immersion.	Zu Berlin. Immersion.	Emersion.
Wahre Zeit der Beobachtungen, auf Paris reducirt.	13^h 1' 20"	13^h 22' 15"	14^h 28' 50"
Correspondirende mittlere Zeit.	13.1.32,8	13.24.27,6	14.31.1,8

Nach den Tafeln der Sonne und des Mondes, welche damals existirten, bildete man folgende Tafel:

	Zu Paris. Immersion.	Zu Berlin. Immersion.	Emersion.
Länge des Mondes = l	8s 5° 31' 42" 4	8s 5° 43' 16" 6	8s 6° 20' 7" 8
Südliche Breite des Mondes = λ	3.47.58,7	3.47.18,7	3.45.10,3
Parallaxe des Mondes.	57.16,2	57.15,9	57.17,1
Wahre Zeit in Bogen.	195° 20' 0"	211° 34' 45"	228° 13' 30"
Rectascension der ☉	15.58.2,3	15.58.50,7	16.1.24,7
Rectascension des Zeniths = g	211° 18' 2" 3	227° 33' 35" 7	244' 4' 54" 7
Declination des Zeniths = h oder geographische Breite.	48.38.50	52.20.24	52.20.24
Halbmesser des ☾ im Horizont.	15' 38" 3	15' 38" 5	15' 38" 8
Vergrößerung. (§. 104.)	2,9	2,7	3,0
Scheinbarer Halbmesser des ☾	σ' = 15'41"2	σ" = 15'41"2	σ''' = 15'41"8

Digitized by Google

Am 16. April 1749 war L oder die scheinbare Länge des Antares = 246° 16′ 19″, 2; die scheinbare Breite desselben = A = 4 . 32 . 10,5 (südlich).

ω oder die Schiefe der Ekliptik war für diese Zeit = 23° 28′ 22″. Aus diesen Angaben folgt

$$t = l - L = -0 . 44 . 36{,}8 = -2676'',8;$$
$$u = \lambda - A = +0{,}44 . 11{,}8 = +2651'',8$$

§. 110.

Die erste Operation besteht darin, dafs wir für die Zeit der Immersion zu Paris die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte der beiden Gestirne suchen, um diese Entfernung mit der Summe der scheinbaren Halbmesser zu vergleichen, und hierdurch zu erfahren, welche Wirkung die Fehler, womit die angenommene Längendifferenz und die aus den Tafeln entnommene Angabe des Ortes des Mondes behaftet ist, auf jene Entfernung der beiden Gestirne hervorbringen.

I. Berechnung der Länge n des Zeniths nach der Formel:

$$\operatorname{tg} n = \cos \omega . \operatorname{tg} g + \frac{\sin \omega . \operatorname{tg} h}{\cos g} \quad (\S.\ 105.)$$

log . cos ω	= 9.96248	log . sin ω	= 9,60022
log . tg g	= 9.78391	log . tg h	= 0,05544—10
log (cos ω . tg g)	= 9.74639	compl. cos g	= 0,06831
cos ω tg g	= 0,55768	$\log\left(\frac{\sin \omega . \operatorname{tg} h}{\cos g}\right)$	= 9,72397
	— 0,52963	$\frac{\sin \omega . \operatorname{tg} h}{\cos g}$	= — 0,52963
tg n	= + 0,02805		

n = 181° 36′ 24″; (n — L = — 64°.39′,55″,2)

Digitized by Google

II. Berechnung der Breite q des Zeniths nach der Formel:

$$\cos q = \frac{\cos g \,.\, \cos h}{\cos n} \quad (\S.\ 105.)$$

$\log . \cos g = 9 . 93169 -$
$\log . \cos h = 9 . 82000$
compl. $\log . \cos n = 0 . 00017 -$
$\log . \cos q = 9 . 75186 +$
daher $\log . \sin q = 9 . 91658$

III. Berechnung von V nach der Formel:

$$u + \frac{t^2}{2} \sin 1'' \sin A \cos \lambda = V. \quad (\S.\ 108.)$$

$\log t = 3,42762 -$ | $\log . du = 0,13693$
idem $= 3,42762 -$ | $du = -1'' 37$
$\log . \sin 1'' = 4,68557$ | $u = 2651'',80$
compl. $\log . 2 = 9,69897$ | $V = 2650'' 43 =$
$\log \frac{t^2}{2} \sin 1'' = 1,23978$ | $= u + du = 44' 10'' 4$
$\log . \cos \lambda = 9,99904$
$\log \frac{t^2}{2} \sin 1'' \cos \lambda = 1,23882$
$\sin A = 8,89811$

$$\log \left(\frac{t^2}{2} \sin 1'' . \sin A \cos \lambda \right) = 0,13693 =$$
$$= \log . du$$

IV. Berechnung von V′ nach der Formel:

$$V' = \cos u - \frac{t^2}{2} \sin 1'' \cos \lambda . \cos A \quad (\S.\ 108.)$$

Digitized by Google

Wie wir oben gesehen haben, ist:

$$\log . \frac{t^2}{2} - \sin 1'' . \cos \lambda = 1{,}23882.$$

Addiren wir hierzu noch den Logarithmen von $\cos A = 9{,}99863$ und von $\sin 1'' = 4{,}68557$

$$\log t^2 \frac{\sin^2 1''}{2} \cos \lambda \cos A = \log du' = 5{,}92302,$$

daher $du' = 0{,}0000837$

$$\log . \cos u = 9{,}99996$$
$$\cos u = 9{,}99991$$
$$-du' = -0{,}00008$$
$$V' = 9{,}99983$$

V. Berechnung von T nach der Formel:

$$T = t . \cos \lambda : \text{ (§. 108.)}$$

$$\log t = 3{,}42762 —$$
$$\log \cos . \lambda = 9{,}99904$$
$$\log T = 3{,}42666$$
$$T = -2670'',9 = -44\ 30'',9$$

VI. Berechnung von F nach der Formel:

$$(\psi - \Psi)[\sin q . \cos A - \cos(n - L) \cos q . \sin A] = F. \text{ (§. 108.)}$$

$\log (\psi - \Psi)$	$= 3{,}53608 —$	$\log (\psi - \Psi)$	$= 3{,}53608$
$\log \sin q$	$= 9{,}91658$	$\log \cos (n - L)$	$= 9{,}63137$
$\log . \cos A$	$= 9{,}99864$	$\log . \cos q$	$= 9{,}75186$
	$3{,}45130$	$\log \sin A$	$= 8{,}89811$
$(\psi - \Psi) \sin q . \cos A = 2826'',8$			$1{,}81742$
		$\cos(n - L) \cos q . \sin A . (\psi - \Psi)$	$= -65'',68$

Digitized by Google

2826″,8
+ 65,7

F = 2892″,5 = + 48′12″,5

VII. Berechnung von $\psi\alpha$ nach der Formel:

$\psi\alpha = \psi\,[\cos(n - L)\cos q \cos A + \sin q \,.\, \sin A]$ (§. 108.)

log ψ	= 3,53608	log ψ	= 353608
log cos (n — L)	= 9,63137	log sin q	= 9,91658
log . cos q	= 9,75186	log sin A	= 8,89811 —
log cos A	= 9,99864		2,35077 —
	2,91795	ψ . sin q . sin A	= — 224″,27
ψ . cos (n — L) cos q . cos A = 827″,84			

$\psi\alpha$ = 827″,84 — 224″,27 = 603″,57

VIII. Berechnung E nach der Formel:

E = sin (n — L) . cos q . (ψ — Ψ) (§. 108.)

log (ψ — Ψ) = 3,53608
log sin (n — L) = 9,95607 —
log . cos q = 9,75186
log E = 3,24401 —

E = — 1754″,0 = — 29′14″

IX. Berechnung von k nach der Formel:

V′ — sin $\psi\alpha$ = K (§. 108.)

V′ = 9,99983
sin $\psi\alpha$ = 0,00293
K = 9,99690
log K = 0,99865

Digitized by Google

X. Berechnung von tg Θ nach der Formel:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(V+F)\sin(V-F)}{\cos\tfrac{1}{2}(T+E)\sin(T-E)} \quad (\S.\ 108.)$$

V	= 2650″4	T	= − 2670″9
F	= 2892″,5	E	= − 1754,0
V − F	= − 242″1	T − E	= − 916″9
V + F	= 5542,9	T + E	= − 4424,9
½ (V + F)	= 2771,4	½ T + E	= − 2212,4
	= 46′11″9		= − 36 52″4

log . cos ½ (V + F)	= 9,99996
log sin (V − F)	= 2,38399 −
cp . log . cos ½ (T + E)	= 0,00002
cp . log sin (T − E)	= 7,03768 −
log . tg Θ	= 9,42165 +
sin Θ	= 9,40701

XI. Berechnung von Σ′ nach der Formel:

$$\operatorname{tg}\Sigma' = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(T+E)\,.\,\sin(T-E)}{K\,.\,\cos\Theta} \quad (\S.\ 108.)$$

log . cos ½ (T + E)	= 9,99998
log sin (T − E)	= 2,96232
cp . log K	= 0,00135
cp . log . cos Θ	= 0,01464
log Σ′	= 2,97829
Σ′	= 15′51″,2

Digitized by Google

XII. Berechnung der Summe der scheinbaren Halbmesser der beiden Gestirne.

Zur Zeit der Immersion zu Paris hatte man:

Halbmesser des Mondes im Horizont, oder

$$d = 15'38'',3 = 938'',3$$

$$\log d = 2{,}97234$$

$$\text{comp. } \log K = 0{,}00135$$

$$\log \sigma' = 2{,}97369$$

also scheinbare Halbmesser des ☾, oder $\sigma' = 941'',2 = 15'41'',2$.

Berechnet man auf die nämliche Art die Immersion und Emersion zu Berlin, so findet man:

Für die Immersion: scheinbare Distanz $\Sigma'' = 15'51'',13$,

— — Emersion: — — $\Sigma''' = 15.45,20$.

§. 111.

Es mufs jetzt bemerkt werden, dafs, wenn die Mondstafeln genau richtig wären, und die wirkliche Längendifferenz zwischen Paris und Berlin = derjenigen wäre, welche wir angenommen haben, man erhalten müfste: $\Sigma' = \sigma'$, $\Sigma'' = \sigma''$, $\Sigma''' = \sigma'''$. Da aber diese Identität nicht statt findet, und die Werthe σ', σ'', σ''' als fehlerfrei betrachtet werden können, weil sie von keinem derjenigen Elemente abhängen, bei welchen Ungewifsheit statt findet, so folgt hieraus, dafs

$$\sigma' - \Sigma' = d\Sigma'$$

$$\sigma'' - \Sigma'' = d\Sigma''$$

$$\sigma''' - \Sigma''' = d\Sigma'''$$

Durch vielfache Beobachtungen ist man zu der Erfahrung gelangt, dafs der Mond ebenso wie die Erde mit einer Atmosphäre umgeben ist, und dafs er uns vermöge dieses Umstan-

Digitized by Google

des um 3″½ gröfser erscheint, als er wirklich ist. Vermindern wir daher den scheinbaren Halbmesser σ' des Mondes um 3 und ½ Secunden, so erhalten wir

$$d\Sigma' = -13'',5, \quad d\Sigma'' = -13'',4, \quad d\Sigma''' = -6'',9$$

§. 112.

Um die Fehler der Mondstafeln zu bestimmen, und denjenigen, womit die angenommene Längendifferenz behaftet ist, verfährt man auf folgende Art.

Durch die Differentiation der Formel im §. 108.

$$\operatorname{tg} \Sigma' = \frac{\sqrt{[\sin T - \sin E]^2 + [\sin V - \sin F]^2}}{K}$$

erhalten wir, indem wir E, F und K als constant ansehen:

$$d\Sigma' \operatorname{tg} \Sigma' = \frac{\cos^2 \Sigma'}{K^2} \left[\sin (T - E) \cos \left(\frac{T+E}{2} \right) (\cos \lambda . \cos t . dt) \right.$$
$$\left. + \sin (V - F) \cos \left(\frac{V+F}{2} \right) \cos V . dV \right];$$

oder:

$$(a) \quad d\Sigma' = \frac{\sin (T - E) \cos \left(\frac{T+E}{2} \right)}{K \operatorname{tg} \Sigma'} \left[\cos \lambda . \cos t . dt \right.$$
$$\left. + \frac{\sin (V-F) \cos \left(\frac{V+F}{2} \right) \cos V . dV}{\sin (T - E) \cos \frac{(T+E)}{2}} \right] \frac{\cos^2 \Sigma'}{K}$$

oder da nach §. 108.

$$\cos \Theta = \frac{\sin (T - E) \cos \left(\frac{T+E}{2} \right)}{K \operatorname{tg} \Sigma'},$$

und

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\cos \frac{1}{2} (V + F) \sin (V - F)}{\cos \frac{1}{2} (T + E) \sin (T - E)},$$

so hat man einfacher:

Digitized by Google

(b) $d\Sigma' = (\cos\Theta \cos\lambda \,.\, \cos t \,.\, dt + \sin\Theta \cos V \,.\, dV) \frac{\cos^2 \Sigma'}{K}$

Durch die Untersuchung der Formeln (a) und (b) findet man, dafs cos Θ negativ ist, wenn sin $(T - E)$ negativ ist; und dafs sin Θ das nämliche Zeichen hat, wie sin $(V - F)$.

Es ist übrigens sehr nahe $dV = du = d(\lambda - \Lambda) = d\lambda$. Es stellen also in diesen beiden Differentialformeln dt und dV im Allgemeinen die totalen Fehler in der Länge und in der Breite vor, welche herrühren sowohl von der Ungenauigkeit der Mondstafeln, als auch von der Ungenauigkeit der bei der Berechnung des Mondortes gebrauchten geographischen Länge. Es ist also $d\Sigma'$ die Wirkung dieser Fehler auf die scheinbare Distanz der beiden Gestirne.

Es sey M die stündliche Bewegung des Mondes in der Länge, und m seine stündliche Bewegung in der Breite. Man hatte am 16. April 1749 und nach den alten Tafeln:

$M = 1988'',5$, $m = 115'',46$, also $\log \frac{m}{M} = 8{,}763906$

Um das Verhältnifs $\frac{m}{M}$ in die Formel (b) einzuführen, nennen wir dT den bei der angenommenen geographischen Längendifferenz begangenen Fehler, dl und $d\lambda$ die Fehler der Mondstafeln in der Länge und in der Breite des Mondes. Die Formel (b), welche sich auf die Immersion zu Paris bezieht, und welche die Form hat:

$$(c) \quad d\Sigma' = p\,dt + q\,dV$$

wird für die Immersion zu Berlin:

$$d\Sigma'' = p' \,.\, dl + q' \,.\, d\lambda + p' \,.\, dT \frac{M}{3600} + q' \,.\, dT \,.\, \frac{M}{3600},$$

oder:

$$(d) \quad d\Sigma'' = p'\,dl + q'\,d\lambda + \left(p' + q' \frac{m}{M}\right) \frac{dT \,.\, M}{3600};$$

Für die Emersion an dem nämlichen Orte hat man ebenso:

Digitized by Google

(e) $d\Sigma''' = p''dl + q''d\lambda + \left(p'' + q''\frac{m}{M}\right)\frac{dT \cdot M}{3600}$

Weil man sich, nach der Annahme, um dT in der geographischen Längendifferenz irrt, und weil die stündliche Bewegung des Mondes in der Länge = M ist, so folgt, dafs $\frac{M \cdot dT}{3600}$ der Fehler ist, welchen die Unrichtigkeit der angenommenen geographischen Länge in der berechneten Länge des Mondes veranlafst. Weil ferner m die stündliche Bewegung in der Breite vorstellt, so ist $\frac{m \cdot dT}{3600}$ der entsprechende Fehler in der Breite des Mondes; also

$$dt = dl + \frac{M \cdot dT}{3600},$$

$$dV = d\lambda + \frac{m \cdot dT}{3600}$$

§. 113.

Wenn man nun mit fünfstelligen Logarithmen die Coefficienten der Formeln (c), (d), (e) berechnet, so findet man nach und nach:

(c') $13'',5 = 0{,}96763 \cdot dl + 0{,}25605 \cdot d\lambda$,

(d') $13'',4 = 0{,}86276 \cdot dl + 0{,}50860 \cdot d\lambda + 0{,}49287\, dT$

(e') $6'',9 = -0{,}85188\, dl + 0{,}52736 \cdot d\lambda - 0{,}45363 \cdot dT$

weil

$\log \mathrm{tg}\,\Theta = 9{,}42165$; $\log \mathrm{tg}\,\Theta' = 9{,}76956$; $\log \mathrm{tg}\,\Theta'' = 9{,}70984 -$

$\log \sin\Theta = 9{,}40701 -$; $\log \sin\Theta' = 9{,}70503 -$; $\log \sin\Theta'' = 9{,}72063 -$.

Die obigen Gleichungen lassen sich ganz auf dem gewöhnlichen Wege auflösen. Zuvörderst zieht man folgende drei Werthe daraus:

(I.) $dl = 13'',952 - 0{,}26461\, d\lambda$

(II.) $dl = 15'',531 - 0{,}58951 \cdot d\lambda - 0{,}57127 \cdot \delta T$

Digitized by Google

(III.) $dl = -8'',0997 + 0,61905 \cdot d\lambda - 0,53250 \cdot dT$;

hierauf hat man, wenn man zwei und zwei dieser Gleichungen mit einander verbindet:

(II) (I) $0 = 1'',579 - 0,32490 \cdot d\lambda - 0,57127 \cdot dT$;

(III) (I) $0 = -22,0517 + 0,88366\, d\lambda - 0,53250 \cdot dT$

und folglich:

(IV.) $d\lambda = 4'',8599 - 1,7583 \cdot dT$,

(V.) $d\lambda = 24'',955 + 0,60260 \cdot dT$;

Hieraus folgt endlich:

(V) (IV) $0 = 20'',0951 + 2,3609 \cdot dT$,

$$dT = \frac{-20,0951}{2,3609} = -8'',51,$$

welches diejenige Gröfse ist, welche von uns gesucht wurde.

Also: $d\lambda = 24'',955 - 5'',131 = 19'',82$

endlich $dl = 13'',952 - 5'',25 = 8'',7$

Aus dieser Berechnung folgt, dafs die Mondstafeln, deren man sich bediente, für die Epoche der Bedeckung eine Breite gaben, welche um $19'',82$, und eine Länge, welche um $8'',7$ zu klein ist.

Wir haben ursprünglich angenommen, dafs die Länge des Mondes zu klein sey in Folge des Fehlers, welcher in der Differenz der Meridiane begangen wurde, und dafs sie folglich um die Gröfse $\frac{M \cdot dT}{3600}$ vergröfsert werden müsse. Aber in dem obigen speciellen Fall hat man: $dT = -8'',5$; die Länge des Mondes ist also im Gegentheil zu grofs; man mufs sie also um $\frac{M}{3600} \cdot 8'',5 = 4'',7$ vermindern. Wenn aber die Länge des Mondes, von Berlin aus gesehen, zu grofs ist, so ist die angenommene Meridiandifferenz von Berlin und Paris zu klein. Es ist also $44',4'' + 8'',5$ = Länge Berlins von Paris = $44',12'',5$.

Digitized by Google

Elfter Abschnitt.

Von der Bestimmung des ersten Azimuths.

§. 114.

Um das Azimuth eines terrestrischen Objects, z. B. einer Thurmspitze, zu bestimmen, ist es blofs erforderlich, mit dem Spiegelsextanten die Distanz des Sonnenrandes von diesem Objecte zu messen, und dabei die Uhrzeit des Augenblicks der Beobachtung zu bemerken. Ist aufserdem auch die geographische Breite φ des Beobachtungsortes bekannt, so ist in dem sphärischen Dreiecke ZPK (Fig. 49.) gegeben:

1) Die Seite $PZ = 90° - \varphi$

2) Der Stundenwinkel $ZPK = s$

3) Aus den Ephemeriden die Seite $PK = 90 - \delta$

Wir finden sodann die Sonnenhöhe $KR = h$ durch die Gleichung:

$$\sin h = \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s + \sin \delta \,.\, \sin \varphi \,.$$

Das Azimuth $RZT = \alpha$ bestimmen wir dagegen durch die Proportion:

$$\sin s : \cos h = \sin \alpha : \cos \delta$$

Aus dieser berechneten wahren Sonnenhöhe findet man die scheinbare

$$h' = h + \text{Refr} - \text{Höhenparallaxe.}$$

Man bezeichne ferner durch h'' die beobachtete Höhe NT (Fig. 54.) des terrestrischen Objectes und durch Δ die beobachtete Distanz SN der Sonne von dem Objecte N. Es ist dann $HS = h'$ und in dem Dreiecke ZSN sind alle drei

Digitized by Google

Seiten bekannt. Den Winkel Z, oder den Bogen HT findet man also durch die bekannte Gleichung:

$$\sin\frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\Delta + h' - h''}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta - h' + h''}{2}\right)}{\cos h' \,.\, \cos h''}}.$$

Hat man so Z gefunden, so ist das gesuchte Azimuth des terrestrischen Objectes gleich der Summe oder der Differenz der Gröfsen Z und α.

Ist man im Besitze eines Theodoliten, so ist es besser und kürzer, wenn man mit demselben den Bogen HT unmittelbar mifst.

§. 115.

Hat man auf diese Art das Azimuth eines terrestrischen Objectes genau bestimmt, so ist dadurch auch die Richtung der Mittagslinie für den Beobachtungsort gegeben. Man kann diese Richtung auch unmittelbar durch einen Theodoliten finden, wenn man vor und nach der Culmination eines Sterns gleiche Höhen desselben beobachtet, und bei jeder Höhenbeobachtung sich die Stelle bemerkt, wo der Nullpunct des horizontalen Nonius den Limbus berührt. Gibt man dann dem Fernrohr eine solche Lage, dafs der Nullpunct des horizontalen Nonius genau in die Mitte der beiden bezeichneten Stellen des Limbus fällt, so liegt die Axe des Fernrohrs in der Meridianebene. Es ist übrigens einleuchtend, dafs man sich mit einem einzigen Paare correspondirender Höhen nicht begnügen darf, wenn man die Mittagslinie mit einiger Genauigkeit bestimmen will.

Digitized by Google

Zwölfter Abschnitt.

Von der geodätischen Bestimmung der geographischen Länge und Breite sowie der Convergenz der Meridiane.

Erstes Capitel.

Entwickelung der von Bohnenberger und Oriani angegebenen Grundformeln.

§. 116.

Aus §. 14. ist bekannt, dafs die Sinus der Winkel, welche die geodätische Linie mit den verschiedenen Meridianen bildet, im umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser der correspondirenden Parallelkreise stehen. Es findet also die Gleichung statt: $t \sin \alpha_{,} = t'' \sin \alpha''$, oder wenn wir statt $t \sin \alpha_{,}$ seinen Werth setzen:

$$\frac{t^2 \, d\varphi}{ds} = t'' \sin \alpha''$$

$$t^2 \, d\varphi = ds \, . \, t'' \sin \alpha''.$$

Es ist aber $\dfrac{t'' \sin \alpha''}{\dfrac{t^2 \, d\varphi}{ds}} = 1.$

Wir können also den Ausdruck $ds \, . \, t'' \sin \alpha''$ unbeschadet seines Werthes mit $\dfrac{t'' \sin \alpha''}{\dfrac{t^2 \, . \, d\varphi}{ds}}$ multipliciren. Wir erhalten dadurch:

Digitized by Google

$$t^2 d\varphi = ds \cdot t'' \sin \alpha'' \cdot \frac{t'' \sin \alpha''}{\frac{t^2 \cdot d\varphi}{ds}};$$

$$t^2 d\varphi = \frac{t''^2 \sin^2 \alpha'' \cdot ds^2}{t^2 \cdot d\varphi};$$

$$t^2 (d\varphi)^2 = \frac{t''^2 \sin^2 \alpha'' \cdot ds^2}{t^2}$$

In Fig. 55. sey PN die halbe kleine Erdaxe, MN die halbe grofse Axe, Aq eine geodätische Linie, $\mathfrak{M} . nPq = d\varphi$; $np = t \cdot d\varphi$; $pq = dm$, $qn = ds$; $(ds)^2 = (np)^2 + (pq)^2$ Also $(t \cdot d\varphi)^2 = (ds)^2 - (dm)^2$, daher

$(ds)^2 - (dm)^2 = \frac{t''^2 \sin^2 \alpha'' \cdot (ds)^2}{t^2}$, oder:

$(ds)^2 \left(1 - \frac{t''^2 \sin^2 \alpha''' \cdot}{t^2}\right) = (dm)^2$, also:

$$\pm ds = \pm \frac{t\, dm}{\sqrt{t^2 - t''^2 \sin^2 \alpha''}}$$

Substituiren wir diesen Werth von ds in die Gleichung:

$t'' \sin \alpha'' = \frac{t^2 \cdot d\varphi}{ds}$, so folgt:

$$t'' \cdot \sin \alpha'' = \frac{t^2\, d\varphi \sqrt{t^2 - t''^2 \sin^2 \alpha''}}{\mathfrak{H}\, dm}$$

$$d\varphi = \frac{t'' \cdot \sin \alpha'' \cdot t \cdot dm}{t^2 \sqrt{t^2 - t''^2 \sin^2 \alpha''}}$$

$$d\varphi = \frac{t'' \cdot \sin \alpha'' \cdot dm}{t \sqrt{t^2 - t''^2 \sin^2 \alpha''}} \text{ *)}$$

§. 117.

Es sey nun ABCD (Fig. 56.) ein Quadrant derjenigen Ellipse, durch deren Umdrehung wir unsern Erdkörper entstanden denken, so ist offenbar dD = dem Halbmesser des

*) Vergl. Monatliche Correspondenz, Band XI. Seite 10.

Digitized by Google

durch den Punct D gehenden Parallelkreises = $\mathfrak{H}''$, eE = dem Halbmesser des durch den Punct E gehenden Parallelkreises = $\mathfrak{H}$. Es ist aber auch Dd = der Abscisse des Punctes D und Ee = der Abscisse des Punctes E. Daher nach (§. 26.)

$$\mathfrak{H}'' = \frac{a^2 \cdot \cos B}{b\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2 B}} = \frac{a \cdot \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}};$$

$$\mathfrak{H} = \frac{a^2 \cdot \cos \beta}{b\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \beta}} = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \beta}},$$

indem wir D als den Hauptort und E als einen neuen Punct ansehen, und die Breite des ersteren B, die Breite des letzteren β nennen.

Es sey ferner m ein Bogen des elliptischen Erdmeridians, so ist $dm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Differenziiren wir die Gleichung $x = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \beta}}$, so folgt

$$dx = \frac{-\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}.a.\sin\beta.d\beta - \frac{1}{2}a.\cos\beta.(1-e^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}d(1-e^2\sin^2\beta)}{1 - e^2\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{-(1-e^2\sin^2\beta).a.\sin\beta.d\beta - \frac{1}{2}a.\cos\beta.d(1-e^2\sin^2\beta)}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

Ferner ist: $d(1-e^2\sin^2\beta) = -e^2.2.\sin\beta.\cos\beta.d\beta$, also

$$dx = \frac{-(1-e^2\sin^2\beta)\,a.\sin\beta.d\beta + e^2\sin\beta.\cos^2\beta.d\beta.a}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{[-(1-e^2\sin^2\beta) + e^2.\cos^2\beta]\,a.\sin\beta.d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{[-1 + e^2\sin^2\beta + e^2\cos^2\beta]\,a.\sin\beta.d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{[-1+e^2]\,a.\sin\beta.d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-[1-e^2]\,a.\sin\beta.d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{b(1+\varepsilon^2)\sin\beta.d\beta}{(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

Digitized by Google

Es folgt ferner aus der Gleichung

$$y = \frac{a\,(1 - e^2)\,\sin\beta}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\beta}}$$

in §. 26:

$$dy = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}.a.(1-e^2)\cos\beta.d\beta - \frac{\frac{1}{2}a(1-e^2)\sin\beta.d.(1-e^2\sin^2\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}}{1 - e^2\sin^2\beta}$$

$$= \frac{(1-e^2\sin^2\beta)\,a.(1-e^2)\cos\beta.d\beta - \frac{1}{2}a(1-e^2)\sin\beta.d.(1-e^2\sin^2\beta)}{(1 - e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

$$= \frac{(1-e^2\sin^2\beta)\,a(1-e^2)\cos\beta.d\beta + e^2\sin^2\beta.\cos\beta.d\beta.a.(1-e^2)}{(1 - e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

$$= \frac{(1 - e^2\sin^2\beta + e^2\sin^2\beta)\,a\,(1 - e^2)\cos\beta.d\beta}{(1 - e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

$$= \frac{a\,(1 - e^2)\cos\beta.d\beta}{(1 - e^2)\sin^2\beta)^{3/2}} = \frac{b\,(1 + \varepsilon^2)\,d\beta.\cos\beta}{(1 + \varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}}$$

Substituiren wir die gefundenen Werthe von dx und dy in die Gleichung $dm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so kömmt:

$$dm = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)^2\sin^2\beta\,(d\beta)^2}{(1-e^2\sin^2\beta)^3} + \frac{a^2(1-e^2)^2\cos^2\beta.(d\beta)^2}{(1-e^2\sin^2\beta)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\,(1-e^2)^2\,(d\beta)^2}{(1-e^2\sin^2\beta)^3}} = \frac{a\,(1-e^2)\,d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

$$= \frac{b\,(1+E^2)\,d\beta}{(1+E^2\cos^2\beta)^{3/2}} = \frac{a^2.d\beta}{b\,(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}}$$

§. 118.

Substituiren wir nun die Werthe von $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{H}$ und dm in die Gleichungen

$$\pm ds = \pm \frac{\mathfrak{H}\,dm}{\sqrt{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}''^2\sin^2\alpha}}$$

und

$$d\varphi = \frac{\mathfrak{H}''.\sin\alpha.dm}{\mathfrak{H}\sqrt{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}''^2\sin^2\alpha}},$$

Digitized by Google

wo wir, der Einfachheit halber, α statt α'' schreiben, so folgt:

$$\pm ds = \pm \frac{a^2 \cdot \cos\beta}{b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\beta}} \cdot \frac{a^2 \cdot d\beta}{b(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}} \sqrt{\frac{a^4 \cdot \cos^2\beta}{b^2(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)} - \frac{a^4 \cdot \cos^2 B \cdot \sin^2\alpha}{b^2(1+\varepsilon^2\cos^2 B)}}$$

$$\pm ds = \frac{a^4 \cos\beta \, d\beta \, (1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-3/2}}{b^2\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\beta}.\sqrt{\frac{a^4\cos^2\beta[b^2(1+\varepsilon^2\cos^2 B)] - a^4\cos^2 B.\sin^2\alpha.b^2(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)}{b^4(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)(1+\varepsilon^2\cos^2 B)}}}$$

$$\pm ds = \frac{a^2\cos\beta \, d\beta \, (1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-3/2}(1+\varepsilon^2\cos^2 B)^{1/2}}{b\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\beta\,\varepsilon^2\cos^2 B - \cos^2 B\sin^2\alpha - \cos^2 B\sin^2\alpha\,\varepsilon^2\cos^2\beta}}$$

$$\pm ds = \frac{a^2\cos\beta \, d\beta \, (1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-3/2}(1+\varepsilon^2\cos^2 B)^{1/2}}{b\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2 B + \cos^2\beta\,\varepsilon^2\cos^2 B(1-\sin^2\alpha)}}$$

$$\pm ds = \frac{a^2\cos\beta \, d\beta \, (1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-3/2}(1+\varepsilon^2\cos^2 B)^{1/2}}{b\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2 B + \varepsilon^2\cos^2\beta\cos^2 B\cos^2\alpha}} \quad (1.)$$

$$\pm d\varphi = \frac{a^2\cos B \cdot \sin\alpha}{b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2 B}} \cdot \frac{a^2\,d\beta}{b(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{a^2\cdot\cos\beta}{b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\beta}} \sqrt{\frac{a^4\cos\cdot^2\beta}{b^2(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)} - \frac{a^4\cdot\cos^2 B\cdot\sin^2\alpha}{b^2(1+\varepsilon^2\cos^2 B)}}}$$

$$\pm d\varphi = \frac{a^4\cdot\sin\alpha\cdot\cos B\,d\beta}{b^2\sqrt{(1+\varepsilon^2\cos^2 B)}\,(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{3/2}} \cdot \frac{b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\beta}}{a^4\cdot\cos\beta} \cdot \frac{\sqrt{(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)(1+\varepsilon^2\cos^2 B)}}{\sqrt{\cos^2\beta + \varepsilon^2\cos^2 B\cos^2\beta - \cos^2 B\sin^2\alpha - \varepsilon^2\cos^2\beta\cos^2 B\sin^2\alpha}}$$

$$\pm d\varphi = \frac{\sin\alpha\cdot\cos B\cdot d\beta\,(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{-1/2}}{\cos\beta\sqrt{[\cos^2\beta - \cos^2 B\sin^2\alpha + \varepsilon^2\cos^2 B\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha]}} \quad (2.)$$

§. 119.

Um Formeln für die Berechnung der Länge und Breite und der Convergenz der Meridiane bilden zu können, ist die Integration der Gleichungen (1) und (2) erforderlich. Zur leichteren Bewerkstelligung dieser Integration führen wir in die genannten Gleichungen einige Hülfsgröfsen ein, indem wir setzen:

Digitized by Google

a) $\frac{ds}{b} = dw$

b) $\sin \alpha \cdot \cos B = \sin k$

c) $\cos {}^2\beta - \sin {}^2\alpha \cos {}^2B = \cos {}^2k \cdot \cos {}^2q$

d) $\sin B = \cos k \cdot \sin q'$

Aus b und c folgt:

$\cos {}^2\beta - \sin {}^2k = \cos {}^2k \cdot \cos {}^2q$, oder

$\cos {}^2\beta = 1 - \cos {}^2k + \cos {}^2k\,(1 - \sin {}^2q)$

$\cos {}^2\beta = 1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q$. Mithin:

$1 - \sin {}^2\beta = 1 - \cos {}^2k \sin {}^2q$, oder:

$\sin {}^2\beta = \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q$.

$\sin \beta = \cos k \cdot \sin q$.

Differentiiren wir nach β und q, so kömmt:

$\cos \beta \cdot d\beta = \cos k \cdot \cos q \cdot dq$.

Dividiren wir diese Gleichung durch die Gleichung

$\cos {}^2\beta = 1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q$, so folgt:

$$\frac{d\beta}{\cos \beta} = \frac{\cos k \cdot \cos q \cdot dq}{1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q}.$$

Aus $dw = \frac{ds}{b}$ folgt:

$$\pm dw = \frac{a^2 \cos \beta \, d\beta \,(1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta)^{-3/2}\,(1 + \varepsilon^2 \cos {}^2B)^{1/2}}{b^2 \sqrt{\cos {}^2\beta - \sin {}^2\alpha \cos {}^2B + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta \cos {}^2B \cos {}^2\alpha}}$$

Substituiren wir nunmehr

statt $\frac{a^2}{b^2}$ seinen Werth $1 + \varepsilon^2$

» $\cos \beta \, d\beta$ seinen Werth $\cos k \cdot \cos q \cdot dq$.

» $\cos {}^2\beta$ seinen Werth $1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q$

» $\cos {}^2\beta - \sin {}^2\alpha \cdot \cos {}^2B$ seinen Werth $\cos {}^2k \cdot \cos {}^2q$,

so erhalten wir:

$$\pm dw = \frac{(1 + \varepsilon^2) \cos k \cdot \cos q \cdot dq\,[1 + \varepsilon^2 (1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q)]^{-3/2}\,(1 + \varepsilon \cos {}^2B)^{1/2}}{\sqrt{\cos {}^2k \cdot \cos {}^2q + \varepsilon^2 \cos {}^2B \cos {}^2\alpha\,(1 - \cos {}^2k \cdot \sin {}^2q)}}$$

Setzen wir ebenso in die Gleichung (2)

Digitized by Google

statt $\frac{d\beta}{\cos\beta}$ seinen Werth $\frac{\cos k \,.\, \cos q \,.\, dq}{1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q}$

» $\cos^2\beta$ seinen Werth $1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q$,

» $\cos^2\beta - \sin^2\alpha \,.\, \cos^2 B$ seinen Werth $\cos^2 k \,.\, \cos^2 q$

so kömmt:

$$\mp d\varphi = \frac{\cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos B \,.\, [1 + \varepsilon^2 (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)]^{-1/2}}{(1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)\sqrt{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q + \varepsilon^2 (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)\cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B}}$$

§. 120.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber, wenn wir alle Theilsätze, welche mit ε^3, ε^4, ε^5 etc. multiplicirt sind, veranchlässigen:

$$(1 + \varepsilon^2 \cos^2 B)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 B;$$

$$[1 + \varepsilon^2 (1 - \cos^2 k \sin^2 q)]^{-3/2} = 1 - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \sin^2 q;$$

$$[1 + \varepsilon^2 (1 - \cos^2 k \sin^2 q)]^{-3/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \sin^2 q;$$

$$[\cos^2 k \,.\, \cos^2 q + \varepsilon^2 \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B (1 - \cos^2 k \sin^2 q)]^{-1/2}$$

$$= (\cos^2 k \,.\, \cos^2 q)^{-1/2} - [\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \cos^2 B (1 - \cos^2 k \sin^2 q)]$$

$$(\cos^2 k \cos^2 q)^{-3/2}$$

Setzen wir der Kürze halber $\cos^2 k \,.\, \cos^2 q = \xi^2$, so kömmt:

$$(\xi^2)^{-1/2} - [\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)]$$

$$(\xi^2)^{-1/2} (\xi^2)^{-1/2} (\xi^2)^{-1/2}$$

$$= (\xi^2)^{-1/2} [1 - \{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)\} (\xi^2)^{-1}]$$

$$= \frac{1}{\xi}\left[1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \cos^2 B (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)}{\xi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\cos k \,.\, \cos q}\left[1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)}{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q}\right].$$

Hieraus folgt:

$$\pm dw = (1 + \varepsilon^2) \cos k \cos q \,.\, dq (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 B)$$

$$(1 - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \sin^2 q)$$

$$\times \frac{1}{\cos k \,.\, \cos q}\left[1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B (1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)}{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q}\right]$$

Digitized by Google

Multipliciren wir $(1+\varepsilon^2)\cos k \cos q \,.\, dq$ mit $1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 B$, und vernachlässigen wir diejenigen Theilsätze, in welchen höhere Potenzen von ε als die zweite vorkommen, so erhalten wir als Product:

$$\cos k \,.\, \cos q \,.\, dq + \varepsilon^2 \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq + \tfrac{1}{2} \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \,.\, \varepsilon^2 \cos^2 B$$

Wird dieses mit $\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \sin^2 q\right)$ multiplicirt, so folgt:

$$\begin{aligned}&\cos k \,.\, \cos q \,.\, dq + \varepsilon^2 \,.\, \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \,.\, \varepsilon^2 \cos^2 B - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \,.\, \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \\ &\quad + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \,.\, \cos^3 k \,.\, \sin^2 q \,.\, \cos q \,.\, dq \\ &= \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \,.\, \varepsilon^2 \cos^2 B \\ &\quad + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \,.\, \cos^3 k \,.\, \sin^2 q \,.\, \cos q \,.\, dq.\end{aligned}$$

Demnach:

$$\begin{aligned}\pm dw = &\left[\cos k \,.\, \cos q \,.\, dq - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq \right. \\ &\left. + \tfrac{1}{2} \cos k \,.\, \cos q \,.\, dq\, \varepsilon^2 \cos^2 B \right. \\ &\left. + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^3 k \,.\, \sin^2 q \,.\, \cos q \,.\, dq\right] \\ &\frac{1}{\cos k \,.\, \cos q}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \alpha \cos^2 B\,(1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q}{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm dw = &\left[dq - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 dq + \tfrac{1}{2} dq \,.\, \varepsilon^2 \cos^2 B \right. \\ &\left. + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \,.\, \sin^2 q \,.\, dq\right] \\ &\left[1 - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \alpha \,.\, \cos^2 B\,(1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)}{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm dw = &\left[dq\,(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 B) + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \,.\, \sin^2 q \,.\, dq\right] \\ &\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \alpha \,.\, \cos^2 B\,(1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q)}{\cos^2 k \,.\, \cos^2 q}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm dw = &\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 B\right) dq + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos^2 k \sin^2 q \,.\, dq \\ &- \frac{\varepsilon^2 \,.\, \cos^2 B \,.\, \cos^2 \alpha \,.\, dq}{2 \,.\, \cos^2 k \,.\, \cos^2 q} + \frac{e^2 \cos B^2 \cos^2 \alpha \,.\, \sin^2 q \,.\, dq}{2 \cos^2 q}\end{aligned} \quad (3.)$$

Digitized by Google

§. 121.

Ebenso erhalten wir:

$$\pm d\varphi = \sin\alpha \cdot \cos B \cdot \cos q \cdot \cos k \cdot dq$$
$$(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2k \sin 2q)]$$
$$\times \frac{1}{\cos k \cdot \cos q\,(1 - \cos 2k \sin 2q)}$$
$$\left[1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos 2B\,(1 - \cos 2k \cdot \sin 2q)}{\cos 2k \cdot \cos 2q}\right]$$

$$\pm d\varphi = [dq \cdot \sin\alpha \cdot \cos B - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin\alpha \cdot \cos B \cdot dq$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin\alpha \cos B \cdot \cos 2k \sin 2q \cdot dq]$$
$$\times \left(\frac{1}{1 - \cos 2k \sin 2q}\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos 2B - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos 2B \cos 2k \cdot \sin 2q}{\cos 2k \cdot \cos 2q}\right)$$

$$\pm d\varphi = [\sin\alpha \cdot \cos B \cdot dq$$
$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin\alpha \cos B \cdot dq\,(1 - \cos 2k \sin 2q)]$$
$$\times \left\{1 - \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos 2B\,(1 - \cos 2k \cdot \sin 2q)}{\cos 2k \cos 2q}\right\}$$
$$\left\{\frac{1}{1 - \cos 2k \cdot \sin 2q}\right\}$$

Setzen wir in dieser Gleichung zur Abkürzung

$$\sin\alpha \cdot \cos B\, dq = g \quad \text{und} \quad \cos 2k \cos 2q = h,$$

so hat dieselbe folgende Gestalt:

$$\pm d\varphi = [g - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 g\,(1 - h)]$$
$$\left[1 - \frac{\tfrac{1}{2}e^2 \cos 2\alpha \cos 2B\,(1 - h)}{h}\right]\left(\frac{1}{1 - h}\right).$$

Multipliciren wir die beiden ersten Factoren mit einander, so folgt:

$$\pm d\varphi = \Big[g - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 g\,(1 - h)$$
$$- \frac{[g - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 g\,(1-h)]\,[\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos 2B\,(1-h)]}{h}\Big]\frac{1}{1-h}$$

Digitized by Google

$$\pm d\phi = \Big\{ g - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 g (1 - h) - \frac{\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos 2\alpha \cdot \cos^2 B (1 - h) g}{h} \Big\} \frac{1}{1-h}$$

$$\pm d\phi = \frac{g}{1-h} - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 g - \frac{\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos 2\alpha \cos^2 B \cdot g}{h} .$$

Restituiren wir statt g und h die gehörigen Werthe, so erhalten wir

$$\pm d\phi = \frac{\sin \alpha \cdot \cos B \cdot dq}{1 - \cos^2 k \cdot \sin^2 q} - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \alpha \cdot \cos B \cdot dq - \frac{\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos 2\alpha \cdot \cos^3 B \cdot \sin \alpha \cdot dq}{\cos^2 k \cdot \cos^2 q}, \text{ oder:}$$

$$\pm d\phi = \frac{\sin k \cdot dq}{1 - \cos^2 k \cdot \sin^2 q} - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin k \cdot dq - \frac{\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin k \cos 2\alpha \cdot \cos^2 B \cdot dq}{\cos^2 k \cdot \cos^2 q} \quad (4.)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist q die einzige veränderliche Gröfse.

§. 122.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$\pm w = (1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 B) q + \tfrac{3}{2} \varepsilon^2 \cos^2 k \int \sin^2 q \cdot dq - \frac{\varepsilon^2 \cdot \cos^2 B \cdot \cos 2\alpha}{2 \cos^2 k} \int \frac{dq}{\cos^2 q} + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 B \cdot \cos 2\alpha \int \frac{\sin^2 q \cdot dq}{\cos^2 q} + \text{Const.} \quad (5.)$$

$$\pm \varphi = \int \frac{\sin k \cdot dq}{1 - \cos^2 k \cdot \sin^2 q} - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin k \cdot q - \frac{\tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin k \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos^2 B}{\cos^2 k} \cdot \int \frac{dq}{\cos^2 q} + \text{Const.} \quad (6.)$$

§. 123.

Um die angedeuteten Integrationen zu vollziehen, müssen wir mit den unter den Integralzeichen stehenden Gröfsen

Digitized by Google

einige Transformationen vornehmen. Betrachten wir vorerst den Ausdruck $\int \sin^2 q \, . \, dq$.

Es ist $\sin q = \sqrt{1 - \cos^2 q} = \sqrt{1 - z^2}$, wenn wir zur Abkürzung $\cos q = z$ setzen. Aus $z = \cos q$ folgt:

$$dz = -\sin q \, . \, dq \, ; \, dq = -\frac{dz}{\sin q} \, .$$

Substituiren wir statt $\sin q$ seinen Werth $\sqrt{1 - z^2}$, so kömmt: $dq = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Also:

$$\int \sin^2 q \, . \, dq = \int -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} (1 - z^2) = -\int dz \, (1 - z^2)^{1/2}$$

Aus der Integralrechnung ist uns aber bekannt, dafs im Allgemeinen:

$$-\int dx \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = -\frac{(2\alpha x + \beta)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}{4\alpha}$$

$$+ \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{8\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} + \text{const.}$$

Setzen wir in dieser Formel

$$x = z$$
$$\gamma = 1$$
$$\beta = 0$$
$$\alpha = -1$$

so erhalten wir:

$$-\int dz \, (1 - z^2)^{1/2} = -\frac{z}{2}\sqrt{1 - z^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \, .$$

Es ist aber $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ bekanntlich $= d \, . \, \text{arc} \, . \, \sin z$, also

$$-\int dz \, (1 - z^2)^{1/2} = -\frac{z}{2} \sqrt{1 - z^2} - \tfrac{1}{2} \, \text{arc} \, . \, \sin z.$$

Wenn wir aber $z = \cos q$ als einen Sinus ansehen, so müssen wir natürlich $\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{\cos q}{\sin q}$, oder die zu dem

Digitized by Google

nämlichen Bogen gehörige Cotangente, als Tangente betrachten. Der $\sin = z$ und die $\text{tang} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ gehören also einem und demselben Bogen an, oder es ist: $\text{arc}(\sin = z) = \text{arc} \cdot \left(\text{tg} = \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right)$. Es ist also

$$-\int dz\,(1-z^2)^{1/2} = -\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}\right).$$

Substituiren wir nun wiederum statt z seinen Werth cos q, so folgt:

$$\int \sin^2 q \cdot dq = -\frac{\cos q}{2}\sqrt{1-\cos^2 q} - \tfrac{1}{2}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\cos q}{\sqrt{(1-\cos^2 q)}}\right)$$

$$= -\frac{\cos q}{2} \cdot \sin q - \tfrac{1}{2} \cdot \text{arc} \cdot \left(\text{tg} = \frac{\cos q}{\sin q}\right),$$

oder

$$\int \sin^2 q \cdot dq = -\frac{\sin q \cdot \cos q}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{arc}\,(\text{tg} = \cot q).$$

Es soll aber arc (tg = cot q) nichts Anderes heifsen, als der Bogen ab (Fig. 57.), welcher zu einer Tangente gehört, die zugleich Cotangente eines Winkels q ist. ab ist aber $= 90^0 - ac = 90^0 - q$,

(a.) also $\int \sin^2 q \cdot dq = -\frac{\sin q \cdot \cos q}{2} - \tfrac{1}{2}\,(90^0 - q)$

§. 124.

Gehen wir nun zu dem Ausdruck $\int \frac{\sin^2 q \cdot dq}{\cos^2 q}$ über. Setzen wir in demselben wiederum

$\sin^2 q = (1 - z^2)$; $dq = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

$\cos^2 q = z^2$, so folgt: $\int \frac{\sin^2 q \cdot dq}{\cos^2 q}$

$$= \int\left(-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \times \frac{(1-z^2)}{z^2}\right) = -\int \frac{dz\sqrt{(1-z^2)}}{z^2}$$

Digitized by Google

Bekanntlich ist aber im Allgemeinen

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^m\,(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b\,(m+np+n)}{am}\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$$

Setzen wir in dieser Formel

dz	an	die	Stelle	von	dx
½	»	»	»	»	p
1	»	»	»	»	a
−1	»	»	»	»	b
2	»	»	»	»	n
−1	»	»	»	»	m

so erhalten wir

$$\int\frac{dz\,\sqrt{1-z^2}}{z^2} = -\frac{(1-z^2)^{3/2}}{z} - 2\int dz\,\sqrt{1-z^2},$$

daher

$$-\int\frac{dz\,\sqrt{1-z^2}}{z^2} = +\frac{(1-z^2)^{3/2}}{z} + 2\int dz\sqrt{1-z^2},$$

oder

$$-\int\frac{dz\,\sqrt{1-z^2}}{z^2} = \frac{\sqrt{(1-z^2)^3}}{z} + 2\int dz\sqrt{1-z^2}.$$

Setzen wir statt $\int dz\,\sqrt{1-z^2}$ seinen oben gefundenen Werth, so kömmt:

$$-\int\frac{\partial z\,\sqrt{1-z^2}}{z^2} = \frac{\sqrt{(1-z^2)^3}}{z} + z\,\sqrt{1-z^2} + \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right),$$

oder nach gehöriger Restitution:

$$\int\frac{\sin^2 q\,.\,dq}{\cos^2 q} = \frac{\sqrt{(1-\cos^2 q)^3}}{\cos q} + \sin q\,.\cos q + (90^\circ - q),$$

also:

Digitized by Google

$$\int \frac{\sin^2 q\, dq}{\cos^2 q} = \frac{\sin^3 q}{\cos q} + \sin q \cos q + (90^0 - q) \quad (b.)$$

§. 125.

Es ist ferner:

$$\int \frac{\sin k \,.\, dq}{1 - \cos^2 k \,.\, \sin^2 q} = \frac{\sin k \,.\, dq}{1 - (1 - \sin^2 k)\sin^2 q}$$

$$= \int \frac{\sin k \,.\, dq}{\cos^2 q + \sin^2 k \sin^2 q} = \int \frac{\frac{\sin k \,.\, dq}{\cos^2 q}}{1 + \sin^2 k \, tg^2 q}$$

$$= \int \frac{\sin k \,.\, d\, tg\, q}{1 + \sin^2 k \, tg^2 q}.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\sin k \,.\, tg\, q = x$, so ist $dx = \sin k \,.\, d \,.\, tg\, q$, indem k constant ist; $x^2 = \sin^2 k \,.\, tg^2 q$. Wir wissen aber, dafs $\frac{dx}{1 + x^2} = d \,.\, arc\,(tg = x)$, oder $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arc \,.\, (tg = x)$, daher

$$(c.) \int \frac{\sin k \,.\, d\, tg\, q}{1 + \sin^2 k \,.\, tg^2 q} = arc\,(tg = \sin k \,.\, tg\, q).$$

(d.) Endlich ist $\int \frac{dq}{\cos^2 q}$ offenbar $= tg\, q$.

§. 126.

Durch Substitution der Werthe a, b und d in die Gleichung 5 erhält man

$$\pm w = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 B)\, q - \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \cos^2 k\, (\sin q \cos q + 90^0 - q)$$

$$- \frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2 \alpha}{\cos^2 k}\, tg\, q + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2 \alpha$$

$$\left(\frac{\sin^3 q}{\cos q} + \sin q \cos q + 90^0 - q\right) + \text{const.} \quad (7.)$$

Wir setzten oben $\frac{ds}{b} = dw$. Integriren wir diese Gleichung und bemerken wir, dafs b, als die halbe Erdaxe,

Digitized by Google

constant ist, so erhalten wir $\frac{s}{b} = w$. Setzen wir $w = 0$, so ist $s = 0$. In diesem Falle ist die Breite des neuen Punctes oder der $\mathfrak{W}$. β = der Breite des Hauptortes = dem Winkel B, also $\sin \beta = \sin B$, oder $\cos k \,.\, \sin q = \cos k \,.\, \sin q'$; $q = q'$. — Durch diese Betrachtung werden wir in den Stand gesetzt, die Constante zu bestimmen. Setzen wir zu diesem Zweck in der Gleichung (7) 0 statt w, q' statt q, und der Kürze halber: a statt $(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 B)$, b statt $\frac{3}{4} \varepsilon^2 \cos^2 k$, c statt $\frac{\frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2 \alpha}{\cos^2 k}$, d statt $\frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2 \alpha$, so erhalten wir:

$$\pm 0 = a q' - b (\sin q' \cos q' + 90^0 - q') - c \operatorname{tg} q' + d \left(\frac{\sin q'^3}{\cos q'} + \sin q' \cos q' + 90^0 - q'\right) + \text{const.},$$

also

$$\text{const.} = -a q' + b (\sin q' \cos q' + 90^0 - q') + c \operatorname{tg} q' - d \left(\frac{\sin q'^3}{\cos q'} + \sin q' \cos q' + 90^0 - q'\right).$$ Daher

$$\pm w = a q - b (\sin q \cos q + 90^0 - q) - c \operatorname{tg} q + d \left(\frac{\sin q^3}{\cos q} + \sin q \cos q + 90^0 - q\right)$$
$$- a q' + b (\sin q' \cos q' + 90^0 - q') + c \,.\, \operatorname{tg} q' - d \left(\frac{\sin q'^3}{\cos q'} + \sin q' \cos q' + 90^0 - q'\right) =$$
$$= (q - q') a - b (\sin q \,.\, \cos q - q - \sin q' \cos q' + q') - c (\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q') + d \left(\frac{\sin^3 q}{\cos q} + \sin q \,.\, \cos q - q - \frac{\sin q'^3}{\cos q'} - \sin q' \cos q' + q'\right)$$

Den mit d multiplicirten Theilsatz können wir in die drei Theilsätze:

Digitized by Google

$$d\left(\frac{\sin q^3}{\cos q} - \frac{\sin {}^3q'}{\cos q'}\right) + d(\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q') - d(q - q')$$

und den mit b multiplicirten Theilsatz in die beiden Theilsätze:

$$-b[\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q'] + b(q - q')$$

zerlegen. Es ist also:

$$\pm w = (q - q')(a + b - d) - b[\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q']$$
$$- c(\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q') + d\left(\frac{\sin {}^3q}{\cos q} - \frac{\sin {}^3q'}{\cos q'}\right)$$
$$+ d(\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q')$$

oder nach gehöriger Restitution:

$$\pm w = (q - q')\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin {}^2B + {}^3/_4\,\varepsilon^2 \cos {}^2k\right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos {}^2B \cos {}^2\alpha\right) - {}^3/_4\,\varepsilon^2 \cos {}^2k(\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \,.\, \cos q')$$
$$- \frac{\varepsilon^2 \cos {}^2B \cos {}^2\alpha}{2 \cos {}^2k}(\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q')$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 \,.\, \cos {}^2B \cos {}^2\alpha}{2}\left(\frac{\sin {}^3q}{\cos q} - \frac{\sin {}^3q'}{\cos q'}\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 \cos {}^2B \,.\, \cos {}^2\alpha}{2}(\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q')$$

(8.)
$$\pm w = (q - q')\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin {}^2B + {}^3/_4\,\varepsilon^2 \cos {}^2k\right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos {}^2B \cos {}^2\alpha\right) - {}^3/_4\,\varepsilon^2 \cos {}^2k(\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \,.\, \cos q')$$
$$- \frac{\varepsilon^2 \cos {}^2B \,.\, \cos {}^2\alpha}{2}\left(\frac{\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q'}{\cos {}^2k} - \frac{\sin {}^3q}{\cos q}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin {}^3q'}{\cos q'} - \sin q \,.\, \cos q + \sin q' \cos q'\right)$$

§. 127.

Durch Substitution der Werthe c und d in die Gleichung 6 erhält man:

Digitized by Google

$$\pm \phi = \text{arc}\,(\text{tg} = \sin k \,.\, \text{tg}\, q) - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sin k \,.\, q - \frac{\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sin k \,.\, \cos^2\alpha \,.\, \cos^2 B \,.\, \text{tg}\, q}{\cos^2 k} + \text{const.} \quad (9.)$$

Die Constante bestimmen wir hier, wenn wir $\phi = 0$ setzen. Es ist dann nämlich wiederum $\sin \beta = \sin B$, $\cos k \,.\, \sin q = \cos k \sin q'$; $q = q'$. Auf ähnliche Weise, wie vorhin, erhalten wir:

$$\pm \phi = \text{arc}\,(\text{tg} = \text{tg}\, q \,.\, \sin k) - \text{arc}\,(\text{tg} = \text{tg}\, q' \sin k) - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sin k \left[q - q' + (\text{tg}\, q - \text{tg}\, q') \frac{\cos^2\alpha \cos^2 B}{\cos^2 k}\right] \quad (10.)$$

§. 128.

Wir wollen jetzt den Formeln 8 und 10 eine etwas einfachere Gestalt zu geben suchen. Bedenken wir defshalb, dafs

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 B + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 B \cos^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1 - \cos^2 B) + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k - \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 B\,(1 - \sin^2\alpha)$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 B + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 B + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 B \sin^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\,(1 - \cos^2 B \sin^2\alpha) + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k.$$

Es ist aber nach der Annahme:

$$\sin\alpha \cos B = \sin k,$$

daher geht der letztere Ausdruck in folgenden über:

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\,(1 - \sin^2 k) + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k =$$

$$1 - \frac{2\varepsilon^2}{4} \cos^2 k + \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k = 1 + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k. \quad (I.)$$

Ferner ist: $\sin q \,.\, \cos q - \sin q' \cos q' = \tfrac{1}{2}(\sin 2q - \sin 2q')$

$$= \sin(q - q')\cos(q + q') \quad (II.)$$

Ferner ist:

Digitized by Google

$$\frac{\sin^2 q}{\cos q} + \sin q \cdot \cos q = \frac{\sin q}{\cos q}(\sin^2 q + \cos^2 q) = \operatorname{tg} q.$$

Statt des mit $-\frac{\varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2 \alpha}{2}$ multiplicirten Theilsatzes der Gleichung 8 können wir daher auch schreiben:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\alpha \cos^2 B\left[\frac{\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q'}{\cos^2 k} - \operatorname{tg} q + \operatorname{tg} q'\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\alpha \cos^2 B\left[\left(\frac{1}{\cos^2 k} - 1\right)(\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q')\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B \cos^2\alpha \left(\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q'\right) \operatorname{tg}^2 k.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q' = \frac{\sin q \cdot \cos q' - \sin q' \cdot \cos q'}{\cos q \cdot \cos q'} = \frac{\sin (q - q')}{\cos q \cdot \cos q'}$$

Also:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B \cos^2\alpha \left(\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} q'\right) \operatorname{tg}^2 k$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2 k \frac{\sin (q - q')}{\cos q \cdot \cos q'}$$

$$= \frac{-\varepsilon^2 \cos^2 B \cos^2\alpha \sin^2 k \sin (q - q') \cos q'}{2 \cos^2 k \cos^2 q' \cdot \cos q}$$

Da aber $\cos^2 k \cos^2 q' = \cos^2 k (1 - \sin^2 q') = \cos^2 k - \cos^2 k \sin^2 q' = \cos^2 k - \sin^2 B$ ist, so können wir statt des letzteren Ausdrucks auch schreiben:

$$\frac{-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B \cos^2\alpha \sin^2 k \cdot \sin (q - q') \cos q'}{(\cos^2 k - \sin^2 B) \cos q}$$

$$= \frac{-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B \cos^2\alpha \cdot \sin^2 k \sin (q - q') \cos q'}{(1 - \sin^2\alpha \cos^2 B - \sin^2 B) \cos q}$$

Dieser Ausdruck geht, da $1 - \sin^2\alpha \cos^2 B - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2\alpha \cos^2 B = \cos^2 B (1 - \sin^2\alpha) = \cos^2 B \cos^2\alpha$, in folgenden über:

Digitized by Google

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 k\ \frac{\sin(q-q')\cos q'}{\cos q}\ . \quad \text{(III.)}$$

Substituiren wir die Werthe I, II und III in die Gleichung (8), so kömmt:

$$\begin{aligned}\pm w &= (q-q')\ (1+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\cos^2 k)\\ &\quad -\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\cos^2 k\sin(q-q')\cos(q+q')\\ &\quad -\frac{\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 k\ .\ \sin(q-q')\cos q'}{\cos q}\end{aligned} \quad \text{(11.)}$$

§. 129.

Wir haben so eben gesehen, dafs:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B\ .\ \cos^2\alpha\ (\mathrm{tg}\,q-\mathrm{tg}\,q')\,\mathrm{tg}^2 k = -\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 k\ \frac{\sin(q-q')\cos q'}{\cos q}$$

oder

$$-\frac{\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 B\ .\ \cos^2\alpha\ (\mathrm{tg}\,q-\mathrm{tg}\,q')\sin k}{\cos^2 k} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\sin k\ \frac{\sin(q-q')\cos q'}{\cos q}$$

Nehmen wir hiernach in der Gleichung (10.) die gehörige Substitution vor, so erhalten wir

$$\pm\varphi = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg}=\mathrm{tg}\,q\,.\,\sin k) - \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg}=\mathrm{tg}\,q'\sin k) - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin k\left(q-q'+\frac{\sin(q-q')\cos q'}{\cos q}\right) \quad \text{(12.)}$$

§. 130.

Um eine Formel für die Berechnung der geographischen Breite zu finden ist es, wie wir sogleich einsehen werden, erforderlich, die Gleichung (11) umzukehren und q' durch w auszudrücken. Multipliciren wir zu diesem Zwecke die bei-

Digitized by Google

den Seiten der Gleichung (11) mit $\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2k\right)$ und setzen wir $w\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2k\right) = w'$, so erhalten wir:

$$w' = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2k\right)(q - q')\ (1 + \tfrac{1}{4}\ \varepsilon^2 \cos 2k)$$
$$- \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2k\right) \tfrac{3}{4}\ \varepsilon^2 \cos 2k \sin(q - q) \cos(q + q')$$
$$- \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2k\right) \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2k \frac{\sin(q - q') \cos q'}{\cos q}.$$

Führen wir die angedeuteten Multiplicationen aus, so erhalten wir:

$$\pm w' = q - q' - \tfrac{3}{4}\ \varepsilon^2 \cos 2k \,.\, \sin(q - q') \cos(q + q')$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2k \,.\, \frac{\sin(q - q') \cos q'}{\cos q},$$

daher

$$q = \pm w' + q' + \tfrac{3}{4}\ \varepsilon^2 \cos 2k \,.\, \sin(q - q') \cos(q + q')$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2k \frac{\sin(q - q') \cos q'}{\cos q}$$

Die Werthe der beiden letzten Theilsätze dieser Gleichung sind sehr klein, weil sie mit ε^2, als einem kleinen Bruche multiplicirt sind. Der genäherte Werth von q ist daher $\pm w' + q'$. Diesen genäherten Werth setzen wir nun statt q in die erwähnten beiden letzten Glieder und erhalten somit:

$$q = q' \pm w' \pm \tfrac{3}{4}\ \varepsilon^2 \cos 2k \cos(2q' \pm w') \,.\, \sin w'$$
$$\pm \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2k \frac{\cos q' \sin w'}{\cos(q' \pm w')} \quad (13.)$$

§. 131.

Es sey (Fig. 58.) A der Hauptpunct, n der neue Punct, p der Fufspunct der von n auf den Meridian AN gefällten Perpendikulären.

Digitized by Google

Die Breite von A sey = B

Die Breite von p = β'

Dieses β' findet man durch die Formel (13.), wenn man bedenkt, dafs für diesen Fall $\alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = +1$, $\beta = \beta'$, w = dem Meridianbogen Ap = m, welches wir uns in Bogensecunden ausgedrückt denken, und durch Substitution dieser Werthe in die eingeführten Hülfsgröfsen:

$$\sin k = \sin \alpha \cos B = 0$$

$$\cos k = 1.$$

$\cos^2 \beta' = 1 - \cos^2 k + \cos^2 k \cdot \cos^2 q = 1 - 1 + \cos^2 q = \cos^2 q$ also $\beta' = q$. Ferner ist $\sin B = \cos k \cdot \sin q'$, daher $\sin B = \sin q'$; $B = q'$.

Aus $w' = w \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 k}{4}\right)$ folgt endlich

$w' = m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$. Es ist daher:

$$\beta' = B \pm m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \pm \tfrac{3}{4} \varepsilon^2 \cos \left[2B \pm m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\right] \sin \left[m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\right]$$

Im letzten Theilsatze können wir die sehr kleine Gröfse $m \frac{\varepsilon^2}{4}$ vernachlässigen und erhalten dadurch

$$\beta' = B \pm m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \pm \tfrac{3}{4} \varepsilon^2 \cos [2B \pm m] \sin m.$$

Die beiden ersten Theilsätze auf der rechten Seite dieser Gleichung sind in Winkelmaafs, der letzte Theilsatz dagegen in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt. Um daher auch diesen Theilsatz in Winkelmaafs zu verwandeln, mufs er durch $\sin 1''$ dividirt werden. (s. S. 15.)

$$\beta' = B \pm m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \pm \frac{\tfrac{3}{4} \varepsilon^2 \cos [2B \pm m] \sin m}{\sin 1''}. \quad (14.)$$

Digitized by Google

§. 132.

Sobald uns β' bekannt ist, sind wir auch im Stande, die Breite und Länge des Punctes n zu berechnen. Zur Berechnung der Breite von n bedienen wir uns wiederum der Formel (13). Im gegenwärtigen Fall ist $\alpha = 90^0$, also $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$, w = dem Bogen pn, welchen wir p nennen und in Secunden ausgedrückt denken; $\sin k = \sin \alpha \,.\, \cos \beta' = \cos \beta'$; $\sin q' = \frac{\sin \beta'}{\cos k} = 1$; also $q' = 90^0$; $w' = p\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin^2 \beta'\right)$. Bedenken wir ferner, dafs

$$\sin q = \frac{\sin \beta}{\cos k}\,; \quad \sin q' = \frac{\sin \beta'}{\cos k}\,,$$

und dafs β' als Breite des Fufspunctes der Perpendiculären immer gröfser ist, als β. Es ist also auch q' gröfser als q und wir müssen demnach in der Formel (13) das untere Zeichen nehmen. Setzen wir endlich, zur Abkürzung, $90^0 - q = \psi$, so folgt nach gehöriger Substitution aus der angeführten Gleichung (13)

$$q = 90^0 - p\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin {}^2\beta'\right) - {}^3/_4\, \varepsilon^2 \, \frac{\sin {}^2\beta' \,.\, \cos (180^0 - w') \sin w'}{\sin 1''}$$

$$q = 90^0 - p + p\,\frac{\varepsilon^2}{4} \sin {}^2\beta' + {}^3/_4\, \varepsilon^2 \, \frac{\sin {}^2\beta' \cos w' \sin w'}{\sin 1''}$$

$$q = 90^0 - p + p\,\frac{\varepsilon^2}{4} \sin {}^2\beta' + {}^3/_4\, \varepsilon^2 \, \frac{\sin {}^2\beta' \,{}^1/_2 \sin 2\, w'}{\sin 1''}$$

$$q = 90^0 - p + p\,\frac{\varepsilon^2}{4} \sin {}^2\beta' + {}^3/_8\, \varepsilon^2 \, \frac{\sin {}^2\beta' \sin 2\, p}{\sin 1''}\,,$$

indem wir näherungsweise in dem Werthe von w' den Theilsatz $-\,{}^1/_4\, \varepsilon^2 \sin {}^2\beta'$ vernachlässigen*). Es ist endlich:

*) Vergl. Monatl. Correspondenz. Band X. Seite 249, letzte Zeile.

Digitized by Google

$$\psi = p - p\frac{\varepsilon^2}{4}\sin 2\beta' - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\frac{\sin 2\beta' \sin 2p}{\sin 1''} \quad (15.)$$

§. 133.

Bedenken wir nun, dafs:

$$\sin\beta = \cos k \cdot \sin q, \text{ oder}$$
$$\sin\beta = \sin\beta' \cdot \sin q, \text{ oder}$$
$$\sin\beta = \sin\beta' \cdot \cos\psi \quad (16.)$$

Wenn wir also mittels der Formeln (14) und (15) die Werthe von β' und ψ gefunden haben, so ergibt sich aus der Formel (16) auch der Werth von β oder die geographische Breite des neuen Punctes n.

Die Längendifferenz des Hauptpunctes und des neuen Punctes ergibt sich aus der Gleichung (12). Da

$$90^\circ - q = \psi \text{ so ist } \sin q = \cos\psi, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}; \sin k = \cos\beta'$$

Der erste Theilsatz des zweiten Gliedes der Gleichung (12) ist also: arc $\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}\cos\beta'\right)$. Es ist ferner $q' = 90^\circ$, also der zweite Theilsatz $= -$ arc $(\operatorname{tg} = \operatorname{tg} \cdot 90^\circ \cdot \cos\beta')$ und der letzte Theilsatz ist

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\sin k\left(90^\circ - \psi - 90^\circ + \frac{\sin(q - q') \cdot o}{\cos q}\right)$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\sin k(-\psi) = +\frac{\varepsilon^2}{2}\sin k \cdot (\psi)$$

Folglich

$$\pm\varphi = \text{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}\cos\beta'\right) - \text{arc}(\operatorname{tg} = \operatorname{tg} 90^\circ \cos\beta')$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \psi \cdot \cos\beta'$$

Es ist aber arc $(\operatorname{tg} = \operatorname{tg} 90^\circ \cos\beta') = \text{arc}(\operatorname{tg} = \infty) = 90^\circ$. Also

Digitized by Google

$$\mp \varphi = + 90^\circ - \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\cos \beta'}{\text{tg } \psi}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \psi \cdot \cos \beta'$$

Wenn uns aber gegeben ist: arc (tg = a), so ist bekanntlich arc $\left(\text{tg} = \frac{1}{a}\right)$ + arc (tg = a) = 90°. Setzen wir nun $\frac{\cos \beta'}{\text{tg } \psi}$ statt a, so folgt:

$$90^\circ - \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\cos \beta'}{\text{tg } \psi}\right) = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{tg } \psi}{\cos \beta'}\right)$$

Wir erhalten daher endlich:

$$\mp \varphi = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{tg } \psi}{\cos \beta'}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \psi \cdot \cos \beta'. \quad (17.)\ ^*)$$

Das doppelte Zeichen von φ bezieht sich hier auf die östlich und westlich vom Hauptmeridian liegenden Puncte.

§. 134.

Nachdem wir also in 16 und 17 zwei sehr einfache, blofs von ψ und β' abhängige Formeln für die geodätische Berechnung der geographischen Länge und Breite gefunden haben, so bleibt uns nur noch übrig, eine Formel für die Berechnung der Convergenz der Meridiane zu bilden. Hierunter versteht man nämlich den Unterschied der Azimuthe, welche von einer und derselben geodätischen Linie mit zwei verschiedenen Meridianen gebildet werden. Wenn also in Fig. 58. N A und N G zwei Meridiane vorstellen, wenn ferner p n n′ eine geodätische Linie ist, und ℳ. N n n′ = α, ℳ. N p n = α'', so ist ℳ. N n h = C = Convergenz der Meridiane N A und N G.

---

*) Die Formeln (14), (15), (16) und (17) sind zuerst von Bohnenberger angegeben worden. S. monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde. VI. Seite 24 u. 25. und X, Seite 249.

Digitized by Google

$$\sin \alpha_{,} = \sin (180^0 - \vartheta) = \sin \vartheta = \frac{\mathfrak{H}'' \,.\, \sin \alpha''}{\mathfrak{H}},$$

oder indem wir statt $\mathfrak{H}''$ und $\mathfrak{H}$ aus §. 117. ihre Werthe setzen.

$$\sin \vartheta = \frac{a^2 \,.\, \cos \beta'}{b \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta'}} \,.\, \frac{b \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta}}{a^2 \,.\, \cos \beta} \,.\, \sin \alpha''$$

Wenn p n eine Perpendikuläre ist, dann ist $\sin \alpha'' = 1$, und $\vartheta = 90^0 - C$, also $\cos C = \frac{\cos \beta' \,.\, \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta}}{\cos \beta \,.\, \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta'}}$.

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos {}^2\beta'}} = (1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos {}^2\beta)\,(1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos {}^2\beta').$$

Führen wir die Multiplication aus, und vernachlässigen wir den mit ε^4 multiplicirten Theilsatz, so folgt:

$$\cos C = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} (1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos {}^2\beta - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \cos {}^2\beta')$$

$$\cos C = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} [1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 (\cos {}^2\beta - \cos {}^2\beta')] \quad (18.)$$

Diese Formel ist zuerst von Oriani in der monatlichen Correspondenz (X. Seite 249) unter der Gestalt

$$\cos C = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} [1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin (\beta + \beta') \,.\, \sin (\beta - \beta')]$$

angegeben worden. Statt $\cos {}^2\beta - \cos {}^2\beta'$ kann man nämlich auch schreiben $\sin (\beta + \beta') \,.\, \sin (\beta - \beta')$.

Zweites Capitel.

Umwandlung der Grundformeln.

§. 135.

Die gefundenen Formeln 16, 17 und 18 für die geographische Breite und Länge und für die Convergenz der Meridiane sind bei der Anwendung nicht sehr bequem. In

Digitized by Google

diesem zweiten Capitel wollen wir daher denselben eine solche Gestalt zu geben suchen, bei welcher diese Unbequemlichkeit wegfällt. Um diesen Zweck zu erreichen, drücken wir m und p in den obigen Formeln durch Theile des Halbmessers aus, weshalb wir statt p, m, p^2, m^2, pm etc. setzen müssen: p . sin 1″, m . sin 1″, p^2 . sin ^{2}1″, m^2 . sin ^{2}1″, pm sin ^{2}1″ etc. und entwickeln sodann die Formeln in Reihen, welche nach Potenzen von p sin 1″ und m sin 1″ geordnet sind, wobei wir alle Theilsätze, in welchen m^4 . sin ^{4}1″, p^4 . sin ^{4}1″, m^3 . p sin ^{4}1″, $\varepsilon^2 m^3$ sin ^{3}1″, $\varepsilon^2 p^3$ sin ^{3}1″, $m^2 p^2$ sin ^{4}1″ vorkommen, vernachlässigen, weil dieses sehr kleine Brüche sind. Der Kürze halber werden wir jedoch in dem Folgenden die Factoren sin 1″, sin ^{2}1″, sin ^{3}1″ etc. nicht wirklich hinschreiben, sondern sie blofs im Sinne behalten.

I. Umwandlung der Formel für die geographische Breite.

$$\sin \beta = \cos \psi \,.\, \sin \beta'.$$

§. 136.

Aus der Formel (15) folgt, wenn wir $\frac{\sin 2\,p}{\sin 1''} = 2\,p$ setzen,

$$\cos \psi = \cos \left(p - p\,\frac{\varepsilon^2}{4} \sin {}^2\beta' - {}^3/_8\, \varepsilon^2 \sin {}^2\beta' \,.\, 2\,p\right)$$

Es ist aber $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$ Das Quadrat des Werthes von ψ ist $= p^2 - 2\,p^2\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta'$, ψ^4 ist $= p^4$ indem alles Uebrige vernachlässigt werden kann. Also $\cos \psi = 1 - \frac{p^2}{2} + p^2\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta' + \frac{p^4}{2.3.4}$, oder näherungsweise $\cos \psi = 1 - \frac{p^2}{2} + p^2\,\varepsilon^2 \sin {}^2B$.

Digitized by Google

§. 137.

Setzen wir den ersten Theilsatz des zweiten Gliedes der Gleichung (14) $= x$ und die beiden letzten Theilsätze $= c$, so ist $\beta' = x + c$ und $\sin \beta' = \sin (x + c)$. Es ist aber: $\sin (x + c)$ bekanntlich

$$= \sin x + c \cos x - \frac{c^2 \sin x}{2} - \frac{c^3 \cdot \cos x}{2 \cdot 3}.$$

Erheben wir die Werthe von c ins Quadrat, so erhalten wir, indem wir $\frac{\sin m}{\sin 1''} = m$ setzen:

$$c^2 = m^2 \left((1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2 + \tfrac{3}{2} \varepsilon^2 \cos (2B + m) m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$
$$+ \tfrac{9}{16} \varepsilon^4 \cos^2 (2B + m) m^2$$

Vernachlässigen wir die Theilsätze mit ε^4, so kömmt:

$$c^2 = m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + \tfrac{3}{2} \varepsilon^2 \cos (2B + m) m^2$$

$$c^2 = m^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{3}{2} \varepsilon^2 \cos (2B + m)\right]$$

Um die Werthe von c auf den Cubus zu erheben, so multipliciren wir den Ausdruck

$$m^2 - m^2 \frac{\varepsilon^2}{2} + m^2 \tfrac{3}{2} \varepsilon^2 \cos (2B + m)$$

mit dem Ausdrucke:

$$m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \tfrac{3}{4} \varepsilon^2 \cos (2B + m) m.$$

Das Product ist $= m^3 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$. Die übrigen Theilsätze fallen sämmtlich weg, weil darin Factoren von der Form $m^3 \varepsilon^2$ etc. vorkommen. — Aus dem nämlichen Grunde müssen wir aber auch $m^3 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = m^3 + \frac{m^3 \varepsilon^2}{4} = m^3$ schreiben.

Substituiren wir nun in die Reihe für $\sin (x + c)$ statt x, c, c^2 und c^3 ihre Werthe, so kömmt:

Digitized by Google

$$\sin\beta' = \sin B \pm \left[m\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \pm \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \cos(2B \pm m)\, m\right] \cos B$$

$$- \frac{m^2\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cos(2B + m)\right]}{2} \sin B \mp \frac{m^3 \cdot \cos B}{2 \cdot 3}$$

Der zweite Theilsatz dieser letzten Gleichung erhält durch Entwicklung des Factors cos (2 B + m) die Gestalt:

$$m \cdot \cos B - m\,\frac{\varepsilon^2}{4} \cos B + \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m \cos B \cos 2B \cos m$$

$$- \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m \cos B \cdot \sin 2B \sin m$$

Da m ein kleiner Bruch ist, so können wir cos m = 1 und sin m = m setzen. Wir erhalten dadurch

$$m \cdot \cos B - m\,\frac{\varepsilon^2}{4} \cos B + \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m \cdot \cos B \cdot \cos 2B$$

$$- \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m^2 \cdot \cos B \cdot \sin 2B =$$

$$m \cdot \cos B - m\,\frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \cos B\,(1 - 3\cos 2B)$$

$$- \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \cdot m^2 \cdot \cos B \cdot \sin 2B$$

Der dritte Theilsatz der obigen Gleichung für sin β' erhält durch Entwickelung von cos (2 B + m) folgende Gestalt:

$$-\frac{m^2}{2} \sin B + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} \cdot \sin B - \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m^2 \cdot \sin B \cdot \cos 2B \cdot \cos m$$

$$+ \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \cdot m^2 \cdot \sin B \cdot \sin 2B \cdot \sin m$$

oder, weil cos m = 1, sin m = m,

$$-\frac{m^2}{2} \sin B + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} \sin B - \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m^2 \sin B \cos 2B$$

$$= -\frac{m^2}{2} \sin B + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} (\sin B - 3 \sin B \cdot \cos 2B)$$

Es ist also:

$$\sin\beta' = \sin B + m \cos B - \frac{\varepsilon^2}{4} m \cdot \cos B\,(1 - 3\cos 2B)$$

$$- \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 m^2 \cos B \cdot \sin 2B - \frac{m^2}{2} \sin B$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} (\sin B - 3 \sin B \cdot \cos 2B) - \frac{m^3}{6} \cos B$$

Digitized by Google

Fassen wir den vierten und sechsten Theilsatz des zweiten Gliedes dieser Gleichung zusammen, so folgt:

$$\sin \beta' = \sin B \pm m \cos B \mp \frac{\varepsilon^2 m}{4} \cos B (1 - 3 \cos 2 B)$$

$$- \frac{m^2}{2} \sin B + \frac{m^2 \varepsilon^2}{4} (\sin B - 3 \sin 3 B) \mp \frac{m^3}{6} \cos . B.$$

§. 138.

Setzen wir die gefundenen Werthe von $\cos \psi$ und $\sin \beta'$ in die Gleichung $\sin \beta = \cos \psi . \sin \beta'$, so erhalten wir:

$$\sin \beta = \sin B \pm m \cos B \mp \frac{\varepsilon^2 m}{4} \cos B (1 - 3 \cos 2 B) - \frac{m^2}{2} \sin B$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} (\sin B - 3 \sin 3 B) \mp \frac{m^3 . \cos B}{6}$$

$$- \frac{p^2 \sin B}{2} \mp \frac{p^2 m . \cos B}{2} + p^2 \varepsilon^2 \sin {}^3 B$$

Setzen wir wiederum den ersten Theilsatz $\sin B$ des zweiten Gliedes dieser Gleichung $= x$, die Summe aller übrigen Theilsätze dagegen $= c$, so ist $\sin \beta = x + c$ oder

$$\beta = \text{arc } (\sin = (x + c))$$

Bekanntlich ist aber:

$$\text{arc } [\sin = (x + c)] = \text{arc } (\sin = x) + \frac{c}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

$$+ \frac{x . c^2}{1 . 2 . \sqrt{(1 - x^2)^3}} + \frac{c^3 (1 + 2 x^2)}{1 . 2 . 3 (1 - x^2)^{5/2}}$$

Substituiren wir statt x und c ihre Werthe, so ist der erste Theilsatz dieser Entwickelung $= \text{arc } (\sin = \sin B) = B$.

Der zweite Theilsatz ist = dem Werthe von c, dividirt durch $\sqrt{1 - \sin {}^2 B} = \cos B$.

Um den dritten Theilsatz der Entwickelung von β zu finden, nennen wir den ersten Theilsatz von $c = a$

den zweiten » » » $= b$

» dritten » » » $= c$

Digitized by Google

den vierten Theilsatz von $c = d$
» fünften » » » $= e$
» sechsten » » » $= f$
» siebenten » » » $= g$
» achten » » » $= h$

und bemerken wir, dafs

$$(a+b+\ldots.h)^2 = a^2+\ldots.h^2+2[a(b+\ldots.h)$$
$$+b(c+\ldots.h)+c(d+\ldots.h)+d(e+\ldots.h)$$
$$+e(f+g+h)+fg+fh+gh] =$$
$$m^2\cos^2B+2\left[-\frac{m^2\cos^2B\,\varepsilon^2}{4}(1-3\cos 2B)\right.$$
$$\left.-\frac{m^3}{2}\cos B.\sin B-\frac{m.p^2.\sin B.\cos B}{2}\right],$$

also $\dfrac{x.c^2}{1.2\sqrt{(1-x^2)^3}} = \dfrac{\sin B.c^2}{2\cos^3 B} = \dfrac{\sin B.m^2\cos^2 B}{2.\cos^3 B}$

$$-\frac{\sin B\,m^2.\cos^2 B.\varepsilon^2}{4\cos^3 B}\left(1-3\cos 2B\right)$$
$$-\frac{\sin^2 B.m^3.\cos B}{2\cos^3 B}-\frac{m.p^2\sin^2 B.\cos B}{2.\cos^3 B}$$

Um den vierten Theilsatz der Entwickelung von β zu finden, bemerken wir, dafs:

$$(a+\ldots.h)^3 = a^3+\ldots h^3+3[a^2(b\ldots.h)+\ldots\ldots]$$
$$+6(abc+abd+\ldots\ldots)$$

Von diesem Ausdrucke bleibt hier blofs der erste Theilsatz $a^3 = m^3.\cos^3 B$ stehen, weil alle übrigen höheren Potenzen von ε, m, p enthalten. Es ist also:

$$\frac{c^3(1+2x^2)}{2.3(1-x^2)^{5/2}} = \frac{m^3.\cos^3 B(1+2\sin^2 B)}{6\cos^5 B}.$$

Folglich:

$$\beta = B+m-\frac{\varepsilon^2 m}{4}\left(1-3\cos 2B\right)-\frac{m^2}{2}\operatorname{tg} B$$
$$+\frac{\varepsilon^2 m^2}{4}\operatorname{tg} B-\frac{\varepsilon^2 m^2}{4}.3.\frac{\sin 3B}{\cos B}-\frac{m^3}{6}$$

Digitized by Google

$$- \frac{p^2 \operatorname{tg} B}{2} - \frac{p^2 m}{2} + p^2 \varepsilon^2 \operatorname{tg} B \sin^2 B + \frac{m^2 \cos^2 B \cdot \sin B}{2 \cos^3 B}$$

$$- \frac{m^2 \varepsilon^2 \cdot \cos^2 B \cdot \sin B}{4 \cos^3 B} (1 - 3 \cos 2B) - \frac{m^2 \cdot \cos B \cdot \sin^2 B}{2 \cos^3 B}$$

$$- \frac{m p^2 \cos B \cdot \sin^2 B}{2 \cos^3 B} + \frac{m^3 \cos^3 B (1 + 2 \sin^2 B)}{6 \cos^5 B}.$$

In diesem Ausdruck für β hebt sich augenscheinlich

$$- \frac{m^2}{2} \operatorname{tg} B \text{ gegen } \frac{m^2 \cos^2 B \cdot \sin B}{2 \cos^3 B}$$

Aber auch $- \frac{m^3}{6} - \frac{m^3 \cos B \cdot \sin^2 B}{2 \cos^3 B}$ hebt sich gegen $\frac{m^3 \cdot \cos^3 B (1 + 2 \sin^2 B)}{6 \cos^5 B}$, denn:

$$- \frac{m^3}{6} - \frac{m^3 \cos B \cdot \sin^2 B}{2 \cos^3 B} + \frac{m^3 \cos^3 B (1 + 2 \sin^2 B)}{6 \cos^5 B}$$

$$= - \frac{m^3 \cdot \cos^2 B}{6 \cos^2 B} - \frac{3 m^3 \sin^2 B}{6 \cos^2 B} + \frac{m^3}{6 \cos^2 B} + \frac{2 \sin^2 B \cdot m^3}{6 \cos^2 B}$$

$$= - \frac{m^3 \cdot \cos^2 B}{6 \cos^2 B} - \frac{m^3 \sin^2 B}{6 \cos^2 B} + \frac{m^3}{6 \cos^2 B}$$

$$= - \frac{m^3 (\cos^2 B + \sin^2 B)}{6 \cos^2 B} + \frac{m^3}{6 \cos^2 B} = 0.$$

Es ist also:

$$\beta = B \pm m \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - 3 \cos 2B) \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} \left[\operatorname{tg} B - \frac{3 \sin 3B}{\cos B} - \operatorname{tg} B (1 - 3 \cos 2B) \right]$$

$$\mp \frac{p^2 \operatorname{tg} B}{2} (1 - 2 \varepsilon^2 \sin^2 B) \mp \frac{m p^2 (\cos^2 B + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^2 B}.$$

Es ist aber:

$$+ \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} \left[\operatorname{tg} B - \frac{3 \cdot \sin 3B}{\cos B} - \operatorname{tg} B (1 - 3 \cos 2B) \right]$$

Digitized by Google

$$= + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4}\left[\frac{\operatorname{tg} B . \cos B - 3 \sin 3B - \operatorname{tg} B . \cos B (1 - 3 \cos 2B)}{\cos B}\right]$$

$$= + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4}\left[\frac{\sin B - 3 . \sin 3 B - \sin B (1 - 3 \cos 2 B)}{\cos B}\right]$$

$$= + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4}\left[\frac{\sin B - 3 \sin 3 B - \sin B + 3 \cos 2 B . \sin B}{\cos B}\right]$$

oder, weil sich sin B gegen — sin B hebt,

$$= - \frac{3 . \varepsilon^2 m^2}{4}\left(\frac{\sin 3 B - \cos 2 B \sin B}{\cos B}\right)$$

$$= - \frac{3 \varepsilon^2 m^2}{4}\left[\frac{3 \sin B . \cos^2 B - \sin^3 B - \cos^2 B . \sin B + \sin^2 B . \sin B}{\cos B}\right]$$

$$= - \frac{3 . \varepsilon^2 . m^2}{4}\left[\frac{3 . \cos^2 B - \sin^2 B - \cos^2 B + \sin^2 B}{\cos B}\right] \sin B$$

$$= - \frac{3 . \varepsilon^2 m^2}{4}\left[\frac{2 . \cos^2 B}{\cos B}\right] \sin B$$

$$= - \frac{3 . \varepsilon^2 . m^2}{4}\left[2 . \cos B . \sin B\right]'$$

$$= - \frac{3 . \varepsilon^2 . m^2}{4} \sin 2 B. \quad \text{Daher:}$$

$$\beta = B \pm m\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - 3 \cos 2B)\right] - \frac{3 \varepsilon^2 m^2}{4} \sin 2 B$$

$$\mp \frac{p^2}{2} \operatorname{tg} B (1 - 2 \varepsilon^2 \sin^2 B) \mp \frac{m p^2}{2 \cos^2 B},$$

oder, wenn wir die im Sinn behaltenen Factoren $\sin 1''$, $\sin^2 1''$, $\sin^3 1''$ etc. wirklich hinschreiben:

$$\beta = B \pm m . \sin 1''\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - 3 . \cos 2 B)\right]$$

$$\mp \frac{3 . \varepsilon^2 . m^2 . \sin^2 1''}{4} \sin 2 B$$

$$\mp \frac{p^2}{2} \sin^2 1'' \operatorname{tg} B (1 - 2 \varepsilon^2 \sin^2 B) \mp \frac{m . p^2 . \sin^3 1''}{2 . \cos^2 B .}$$

Digitized by Google

§. 139.

Bezeichnen wir die ganze rechte Seite dieser Gleichung durch Z, so ist dieses $(\beta - B) = Z$ eine in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Gröfse. Wollen wir $\beta - B = Z$ in Secunden haben, so müssen wir setzen $\frac{(\beta - B)}{\sin 1''} = \frac{Z}{\sin 1''}$, oder $(\beta - B)$ in Secunden $= \frac{Z}{\sin 1''}$,

also $(\beta - B)$ in Secunden $= \pm m \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - 3 \cdot \cos 2B)\right]$

$\mp \frac{3 \cdot \varepsilon^2 \cdot m^2 \cdot \sin 1''}{4} \sin 2B \mp \frac{p^2 \cdot \sin 1''}{2} \operatorname{tg} B (1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 B)$

$\mp \frac{m \cdot p^2 \sin^2 1''}{2 \cdot \cos^2 B}$.

oder β in Secunden $= B$ in Sec. $\pm Z$ in Secunden.

$\beta = B \pm m \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - 3 \cdot \cos 2B)\right] \mp \frac{m : p^2 \cdot \sin^2 1''}{2 \cos^2 B}$

$\mp \frac{p^2 \cdot \sin 1''}{2} \operatorname{tg} B (1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 B) \mp \frac{3 \cdot \varepsilon^2 \cdot m^2 \cdot \sin 1''}{4} \sin 2B$

Die Länge eines Grades auf einer Kugel von dem in Klaftern gegebenen Halbmesser b ist $= \frac{b \cdot \pi}{180^0} = g$. Bezeichnen wir nun durch M die in Klaftern ausgedrückte Abscisse eines Punctes, ebenso durch P die in Klaftern ausgedrückte Ordinate dieses Punctes. Offenbar ist dann: M in Gradlängen $= \frac{M}{g}$. Wollen wir M in Secunden ausdrücken, so müssen wir beide Seiten der Gleichung durch 3600 multipliciren, also (M in Gradlängen) $3600 = \frac{M}{g} 3600$ oder M in Secunden $= m = M\left(\frac{3600}{g}\right)$. Ebenso ist $p = P\left(\frac{3600}{g}\right)$.

Digitized by Google

Substituiren wir diese Werthe von m und p in die obige Gleichung für β, so folgt:

$$\beta = B \pm M \left(\frac{3600}{g}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - 3 \cos 2B)\right]$$

$$\mp M P^2 . \left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{\sin {}^2 1''}{2 \cos {}^2 B}$$

$$\mp P^2 \left(\frac{3600}{g}\right)^2 \frac{\sin 1''}{2} \operatorname{tg} B (1 - 2 \varepsilon^2 \sin {}^2 B)$$

$$\mp M^2 \left(\frac{3600}{g}\right)^2 \frac{3 . . \varepsilon^2 \sin 1''}{4} \sin 2B$$

Setzen wir

$$\left(\frac{3600}{g}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - 3 . \cos 2B)\right] = e$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3 . \frac{\sin {}^2 1''}{2 \cos {}^2 B} = f$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^2 \frac{\sin 1''}{2} \operatorname{tg} B (1 - 2 \varepsilon^2 \sin {}^2 B) = g$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^2 . \frac{3 . \varepsilon^2 . \sin 1''}{4} \sin 2B = h$$

so folgt:

$$\beta = B + e M - f M P^2 - g P^2 - h M^2 \quad \text{(I.)}$$

II. Umwandlung der Formel für die geographische Länge.

$$\mp \varphi = \text{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \beta'}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \psi \cos \beta'$$

§. 140.

Es ist bekanntlich $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$, also auch $\operatorname{tg} \psi = \psi + \frac{\psi^3}{3}$. Setzen wir statt ψ seinen

Digitized by Google

Werth aus (15.) und bemerken wir, dafs $\frac{\sin 2\,p}{\sin 1''} = 2\,p$ gesetzt werden kann, so folgt:

$$\operatorname{tg}\psi = p - \frac{\varepsilon^2}{4}\sin {}^2\beta'\,p - {}^3/_8\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,2\,p + \frac{\left(p - \frac{\varepsilon^2}{4}\sin {}^2\beta'\,p - {}^3/_8\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,2\,p\right)^3}{3}$$

Es ist aber:

$$p - \frac{\varepsilon^2}{4}\sin {}^2\beta'\,p - {}^3/_8\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,2\,p$$

$$= p - \frac{2\,\varepsilon^2}{8}\sin {}^2\beta' \,.\, p - {}^6/_8\,\varepsilon^2 \sin {}^2\beta' \,.\, p$$

$$= p - \varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,p, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg}\psi = p - \varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,p + \frac{(p - \varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,p)^3}{3}.$$

Führen wir die angedeutete Potenzirung im letzten Theilsatze aus, so folgt:

$$\operatorname{tg}\psi = p - \varepsilon^2 \sin {}^2\beta'\,p + \frac{p^3}{3},$$

weil alles Uebrige vernachlässigt werden kann. Setzen wir den genäherten Werth von $\sin \beta' = (\sin B + m \cos B)$ in diese Gleichung, so folgt:

$$\operatorname{tg}\psi = p - \varepsilon^2 (\sin B + m \cos B)^2\,p + \frac{p^3}{3}$$

$$\operatorname{tg}\psi = p - \varepsilon^2\,p \,.\, \sin {}^2B - \varepsilon^2\,p\,m \sin 2\,B + \frac{p^3}{8}$$

§. 141.

Mit Hülfe der Taylor'schen Reihe findet man leicht,

$$\frac{1}{\cos(x + c)} = \frac{1}{\cos x} + \frac{c \,.\, \sin x}{\cos {}^2x} + \frac{c^2\,(1 + \sin {}^2x)}{1.2.\cos {}^3x}.$$

Setzen wir nun in (14) $B = x$ und

$$m\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + {}^9/_4\,\varepsilon^2 \cos [2\,B + m]\,m = c$$

Digitized by Google

so hat man:

$$\frac{1}{\cos \beta'} = \frac{1}{\cos B} + \frac{m\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$+ \frac{3/4\ \varepsilon^2 . m . \cos (2B + m) \sin B}{\cos {}^2B} + \ldots.$$

Dieser letzte Theilsatz ist

$$= \frac{3/4\ \varepsilon^2 . m \left[\cos 2B . \cos m - \sin 2B . \sin m\right] \sin B}{\cos {}^2B}$$

oder weil m sehr klein ist

$$= \frac{3/4\ \varepsilon^2\ m\ (\cos 2B . 1 - \sin 2B . m) \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$= \frac{3/4\ \varepsilon^2\ m . \cos 2B . \sin B}{\cos {}^2B} - \frac{3/4\ \varepsilon^2\ m^2 \sin 2B . \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$= \frac{3/4\ \varepsilon^2\ m \cos 2B . \sin B}{\cos {}^2B} \text{ (wegen } \varepsilon^2\ m^2)$$

Um noch einen Theilsatz der Entwickelung von $\frac{1}{\cos \beta'}$ zu bekommen, erheben wir den Werth von c ins Quadrat. Wir erhalten alsdann:

$$c^2 = m^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2 + 2\ 3/4\ \varepsilon^2\ m . \cos (2B + m)\ m\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

$$+ 9/16\ \varepsilon^4\ m^2 \cos^2 (2B + m) = m^2$$

Es ist also:

$$\frac{1}{\cos \beta'} = \frac{1}{\cos B} + \frac{m\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$+ \frac{3/4\ \varepsilon^2\ m . \cos 2B . \sin B}{\cos {}^2B} + \frac{m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B}$$

$$\frac{1}{\cos \beta'} = \frac{1}{\cos B} + \frac{m . \sin B}{\cos {}^2B} - \frac{\varepsilon^2 . m . \sin B}{4 \cos {}^2B}$$

$$(1 - 3 . \cos 2B) + m^2 \frac{(1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B}$$

Digitized by Google

§. 142.

Multipliciren wir die Werthe von tg ψ und $\frac{1}{\cos \beta'}$ mit einander, so folgt:

$$\frac{\text{tg } \psi}{\cos \beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 . p . \sin {}^2B}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 . p . m . \sin 2B}{\cos B}$$

$$+ \frac{p^3}{3 \cos B} + \frac{p . m . \sin B}{\cos {}^2B} - \frac{\varepsilon^2 . p . m . \sin {}^3B}{\cos {}^2B}$$

$$- \frac{\varepsilon^2 . m . p (1 - 3 \cos 2B) \sin B}{4 . \cos {}^2B} + \frac{p . m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B}$$

$$\frac{\text{tg } \psi}{\cos \beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 . p . \sin {}^2B}{\cos B} + \frac{p . m . \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$+ \frac{p^3}{3 . \cos B .} - \frac{\varepsilon^2 . p . m}{\cos {}^2B}$$

$$\left[\sin 2B . \cos B + \sin {}^3B + \frac{1 - 3 . \cos 2B}{4} \sin B\right]$$

$$+ p m^2 \left(\frac{1 + \sin {}^2B}{2 \cos {}^3B}\right)$$

Bemerken wir, dafs $\cos 2B = 1 - 2 \sin {}^2B$. Der Theilsatz $\frac{1 - 3 . \cos 2B}{4} \sin B$ ist also =

$$\frac{1 - 3 (1 - 2 \sin {}^2B)}{4} \sin B = \frac{1 - 3 + 6 \sin {}^2B}{4} \sin B.$$

Demnach ist:

$$\frac{\text{tg } \psi}{\cos \beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 . p \sin {}^2B}{\cos B} + \frac{p m . \sin B}{\cos {}^2B}$$

$$+ \frac{p^3}{3 \cos B} + \frac{p m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B} - \frac{\varepsilon^2 . p . m}{\cos {}^2B}$$

$$\left[2 \sin B . \cos {}^2B + \sin {}^2B . \sin B + \left(\frac{1 - 3 + 6 \sin {}^2B}{4}\right) \sin B\right]$$

Es ist ferner $2 \sin B \cos {}^2B + \sin {}^2B \sin B$

$$= (2 . \cos {}^2B + \sin {}^2B) \sin B =$$

Digitized by Google

$$= (\cos^2 B + \cos^2 B + \sin^2 B) \sin B$$
$$= (\cos^2 B + 1) \sin B.$$

Daher:

$$\frac{tg\,\psi}{\cos\beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot \sin^2 B}{\cos B} + \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos^2 B}$$
$$+ \frac{p^3}{3 \cdot \cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m}{\cos^2 B} \sin B \left[1 + \cos^2 B + \frac{(1 - 3 + 6 \cdot \sin^2 B)}{4}\right]$$
$$+ \frac{p \cdot m^2 (1 + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^3 B}$$

$$\frac{tg\,\psi}{\cos\beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot \sin^2 B}{\cos B} + \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos^2 B}$$
$$+ \frac{p^3}{3 \cdot \cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m}{\cos^2 B} \sin B \frac{(4 + 4\cos^2 B + 1 - 3 + 6 \sin^2 B)}{4}$$
$$+ \frac{p \cdot m^2 (1 + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^3 B}$$

Es ist aber $\frac{4 + 4\cos^2 B + 1 - 3 + 6 \sin^2 B}{4}$

$$= \frac{1 + 2 \cdot \cos^2 B + 3 \cdot \sin^2 B}{2}$$
$$= \frac{1 + 2 \cdot \cos^2 B + 2 \sin^2 B + \sin^2 B}{2}$$
$$= \frac{1 + 2 (\cos^2 B + \sin^2 B) + \sin^2 B}{2}$$
$$= \frac{3 + \sin^2 B}{2}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{tg\,\psi}{\cos\beta'} = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot \sin^2 B}{\cos B} + \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos^2 B}$$
$$+ \frac{p^3}{3 \cdot \cos B} - \frac{\varepsilon^2\, p \cdot m}{2 \cos^2 B} \sin B\, (3 + \sin^2 B)$$
$$+ \frac{p \cdot m^2 (1 + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^3 B}$$

Digitized by Google

Es ist aber bekanntlich $\text{arc}\,(\text{tg} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots$

Also:

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{tg}\,\psi}{\cos\beta'}\right) = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot \sin^2 B}{\cos B} + \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos^2 B}$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m}{2\cos^2 B} \sin B\,(3 + \sin^2 B) + p\,m^2 \frac{(1 + \sin^2 B)}{2\cos^3 B}$$

$$+ \frac{p^3}{3 \cdot \cos B} - \frac{p^3}{3\cos^3 B}$$

§. 143.

Der zweite Theilsatz des Werthes von φ ist

$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \psi \cos\beta'.$$

Setzen wir statt ψ seinen Näherungswerth p und statt β' seinen Näherungswerth $(B + m)$, so erhalten wir:

$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \psi \cos\beta' = - \frac{\varepsilon^2 \cdot p}{2} \cos(B + m)$$

$$= - \frac{\varepsilon^2 \cdot p}{2} (\cos B - m \cdot \sin B).$$

§. 144.

Durch Substitution der Werthe von $\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{tg}\,\psi}{\cos\beta'}\right)$ und $- \frac{\varepsilon^2}{2} \psi \cos\beta'$ in die Gleichung für φ erhalten wir also

$$\mp\varphi = \frac{p}{\cos B} - \frac{\varepsilon^2}{2} p \cdot \cos B - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot \sin^2 B}{\cos B}$$

$$+ \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos^2 B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m \cdot \sin B\,(3 + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^2 B}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} p \cdot m \cdot \sin B + \frac{p \cdot m^2 (1 + \sin^2 B)}{2 \cdot \cos^3 B} - \frac{p^3}{3 \cdot \cos^3 B} + \frac{p^3}{3 \cdot \cos B}$$

$$\mp\varphi = \frac{p}{\cos B}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2 B - \varepsilon^2 \sin^2 B\right)$$

Digitized by Google

$$+ \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos {}^2B} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (3 + \sin {}^2B) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos {}^2B\right]$$

$$+ \frac{p\, m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B} - \frac{p^3}{3 \cdot \cos {}^3B} + \frac{p^3 \cdot \cos {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B}$$

$$\mp \varphi = \frac{p}{\cos B} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (\cos {}^2B + 2 \sin {}^2B)\right]$$

$$+ \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos {}^2B} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} (3 + \sin {}^2B - \cos {}^2B)\right]$$

$$+ \frac{p \cdot m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B} - \frac{p^3 - p^3 \cos {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B}$$

Der letzte Theilsatz ist ferner:

$$= - \frac{p^3 (1 - \cos {}^2B)}{3 \cdot \cos {}^3B} = - \frac{p^3 \sin {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B}$$

und statt des Ausdruckes $\frac{3 + \sin {}^2B - \cos {}^2B}{2}$ läfst sich auch schreiben $\frac{2 + 1 + \sin {}^2B - \cos {}^2B}{2}$

$$= \frac{2 + \sin {}^2B + \cos {}^2B + \sin {}^2B - \cos {}^2B}{2}$$

$$= \frac{2 + 2 \cdot \sin {}^2B}{2} = 1 + \sin {}^2B$$

Hieraus folgt endlich:

$$\mp \varphi = \frac{p}{\cos B} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin {}^2B)\right]$$

$$+ \frac{p \cdot m \cdot \sin B}{\cos {}^2B} \left[1 - \varepsilon^2 (1 + \sin {}^2B)\right]$$

$$+ \frac{p\, m^2 (1 + \sin {}^2B)}{2 \cdot \cos {}^3B} - \frac{p^3 \cdot \sin {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B}$$

oder nach einer ähnlichen Betrachtung wie oben bei der Formel für die Breite:

$$\mp \varphi = P \cdot \frac{1}{\cos B} \frac{3600}{g} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin {}^2B)\right]$$

Digitized by Google

$$- P^3 \left(\frac{3600}{g}\right)^3 \frac{\sin {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B} \sin {}^2 1''$$

$$+ P \cdot M \frac{\sin B}{\cos {}^2B} \left(\frac{3600}{g}\right)^2 \left[1 - \varepsilon^2 (1 + \sin {}^2B)\right] \sin 1''$$

$$+ PM^2 \cdot \left(\frac{3600}{g}\right)^3 \frac{(1 + \sin {}^2B)}{2 \cos {}^3B} \sin {}^2 1''$$

Setzen wir

$$\frac{1}{\cos B} \cdot \frac{3600}{g} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin {}^2B)\right] = a;$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3 \frac{\sin {}^2B}{3 \cdot \cos {}^3B} \sin {}^2 1'' = b;$$

$$\frac{\sin B}{\cos {}^2B} \left(\frac{3600}{g}\right)^2 \left[1 - \varepsilon^2 (1 + \sin {}^2B)\right] \sin 1'' = c;$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3 \frac{(1 + \sin {}^2B)}{2 \cdot \cos {}^3B} \sin {}^2 1'' = d$$

so ist: $\varphi = aP - bP^3 + cPM + dPM^2$ (II.)

III. Umwandlung der Formel für die Convergenz der Meridiane.

$$\cos C = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \left[1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 (\cos {}^2\beta - \cos {}^2\beta')\right]$$

§. 145.

Bei der Umwandlung der Formel für die geographische Breite haben wir gefunden

$$\cos \psi = 1 - \frac{p^2}{2} + p^2 \varepsilon^2 \sin {}^2\beta' + \frac{p^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Aus der Gleichung (16) folgt also:

$$\sin \beta = \sin \beta' - \sin \beta' \frac{p^2}{2} + p^2 \varepsilon^2 \sin {}^3\beta' + \frac{p^4 \cdot \sin \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Setzen wir $\sin \beta' = a$; $- \sin \beta' \frac{p^2}{2} = b$, $p^2 \varepsilon^2 \sin {}^3\beta' = c$;

Digitized by Google

$\frac{p^4 . \sin \beta'}{2.3.4.} = d$, und bemerken wir, dafs $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ so erhalten wir $\sin^2\beta = \sin^2\beta' + \frac{p^4}{4} \sin^2\beta' - p^2 . \sin^2\beta' + 2p^2\varepsilon^2 \sin^4\beta' + \frac{p^4}{3.4} \sin^2\beta'$. Es ist aber $\frac{p^4}{4} \sin^2\beta' + \frac{p^4}{3.4} \sin^2\beta' = \frac{3 . p^4}{3 . 4} \sin^2\beta' + \frac{p^4}{3.4} \sin^2\beta' = \frac{4p^4}{3.4} \sin^2\beta' = \frac{p^4}{3} \sin^2\beta'$. Daher $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \sin^2\beta' + p^2 \sin^2\beta' - 2p^2\varepsilon^2 \sin^4\beta' - \frac{p^4 . \sin^2\beta'}{3}$

$\cos^2\beta = \cos^2\beta' + p^2 \sin^2\beta' - 2p^2\varepsilon^2 \sin^4\beta' - \frac{p^4 . \sin^2\beta'}{3}$

und $\frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{(\cos^2\beta)^{1/2}} = (\cos^2\beta)^{-1/2}$.

Um den Ausdruck

$$\left(\cos^2\beta' + p^2 \sin^2\beta' - 2p^2\varepsilon^2 \sin^4\beta' - \frac{p^4 . \sin^2\beta'}{3}\right)^{-1/2}$$

zu entwickeln, setzen wir wiederum der Kürze halber die beiden ersten Theilsätze $= A = a + b$, die beiden letzten Theilsätze $= -B = -(c + d)$ und bemerken, dafs

$(A - B)^{-1/2} = A^{-1/2} + \frac{1}{2} BA^{-3/2}$

$(a + b)^{-1/2} = a^{-1/2} - \frac{1}{2} ba^{-3/2} + \frac{3}{8} b^2 a^{-5/2}$

$(a + b)^{-3/2} = a^{-3/2} - \frac{3}{2} ba^{-5/2} + \frac{15}{8} b^2 a^{-7/2}$

weil alle übrigen Theilsätze wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden können. Es ist also gegenwärtig

$(a + b + c + d)^{-1/2} = a^{-1/2} - \frac{1}{2} ba^{-3/2} + \frac{3}{8} b^2 a^{-5/2} + \frac{1}{2} c . a^{-3/2} + \frac{1}{2} d . a^{-3/2}$.

Restituiren wir nun wiederum die Werthe von a, b, c und d, so erhalten wir

Digitized by Google

$$\frac{1}{\cos\beta} = (\cos 2\beta')^{-1/2} - \tfrac{1}{2}\,p^2 \sin 2\beta' (\cos 2\beta')^{-3/2}$$
$$+ \tfrac{3}{8}\,p^4 . \sin^4\beta' (\cos 2\beta')^{-5/2} + \varepsilon^2 p^2 \sin^4\beta' (\cos 2\beta')^{-3/2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{p^4 . \sin 2\beta'}{3}\right)(\cos 2\beta')^{-3/2}$$

$$\frac{1}{\cos\beta.} = \frac{1}{\cos\beta'} - \frac{p^2 \sin 2\beta'}{2\cos^3\beta'} + \tfrac{3}{8}\,\frac{p^4 . \sin 4\beta'}{\cos^5\beta'}$$
$$+ \frac{p^2 . \varepsilon^2 . \sin 4\beta'}{\cos^3\beta'} + \tfrac{1}{6}\,\frac{p^4 . \sin 2\beta'}{\cos^3\beta'}$$

$$\frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta'} - \frac{p^2 . \sin 2\beta'}{2\cos^3\beta'} + \frac{p^2\varepsilon^2 . \sin 4\beta'}{\cos^3\beta'}$$
$$+ \frac{p^4 . \sin 2\beta'}{2\cos^3\beta'}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{4}\,\frac{\sin 2\beta'}{\cos 2\beta'}\right)$$

Da $\frac{\cos\beta'}{\cos\beta} = \cos\beta'\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)$, so erhalten wir die Entwickelung für $\frac{\cos\beta'}{\cos\beta}$, wenn wir jeden einzelnen Theilsatz des so eben gefundenen Ausdrucks für $\frac{1}{\cos\beta}$ mit $\cos\beta'$ multipliciren. Daher:

$$\frac{\cos\beta'}{\cos\beta} = 1 - \frac{p^2 \operatorname{tg} 2\beta'}{2} + \frac{p^2\varepsilon^2 . \sin 4\beta'}{\cos 4\beta'}$$
$$+ \frac{p^4 . \sin 2\beta'}{\cos 2\beta'}\left(\frac{1}{2 . 3} + \frac{3}{2 . 4}\,\frac{\sin 2\beta'}{\cos 2\beta'}\right)$$

Statt des letzten Theilsatzes können wir auch schreiben

$$\frac{p^4 . \sin 2\beta'}{\cos 2\beta'}\left(\frac{4 . \cos 2\beta'}{2 . 3 . 4 . \cos 2\beta'} + \frac{9 . \sin 2\beta'}{2 . 3 . 4 . \cos 2\beta'}\right)$$
$$= \frac{p^4 . \sin 2\beta' (4 . \cos 2\beta' + 9 \sin 2\beta')}{\cos 4\beta' . 2 . 3 . 4}$$
$$= \frac{p^4 . \sin 2\beta' (4 . \cos 2\beta' + 4 \sin 2\beta' + 5 \sin 2\beta')}{\cos 4\beta' . 2 . 3 . 4 .}$$
$$= \frac{p^4 . \sin 2\beta' (4 + 5 . \sin 2\beta')}{\cos 4\beta' . 2 . 3 . 4}$$

Digitized by Google

also:

$$\frac{\cos \beta'}{\cos \beta} = 1 - \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} + \frac{p^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \sin^4 \beta'}{\cos^2 \beta'}$$

$$+ \frac{p^4 \cdot \sin^2 \beta'}{\cos^4 \beta'} \left(\frac{4 + 5 \sin^2 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

§. 146.

Der zweite Factor des Werthes von cos C ist

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 (\cos^2 \beta - \cos^2 \beta')$$

$$= 1 + \left[\frac{\varepsilon^2}{2} (\cos^2 \beta' + p^2 \sin^2 \beta' - \cos^2 \beta') \right]$$

$$= 1 + \left[\frac{\varepsilon^2}{2} p^2 \sin^2 \beta' \right].$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit dem eben gefundenen Werthe von $\frac{\cos \beta'}{\cos \beta}$, so erhalten wir

$$\cos C = 1 - \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} + \frac{p^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \sin^4 \beta'}{\cos^2 \beta'}$$

$$+ \frac{p^4 \cdot \sin^2 \beta'}{\cos^4 \beta'} \left(\frac{4 + 5 \cdot \sin^2 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} p^2 \cdot \sin^2 \beta'$$

$$\cos C = 1 - \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} + \frac{2 \cdot \varepsilon^2 \cdot p^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta' \cdot \sin^2 \beta'}{2}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \cdot p^2}{2} \operatorname{tg}^2 \beta' \cos^2 \beta' + \frac{p^4 \cdot \sin^2 \beta'}{\cos^4 \beta} \left(\frac{4 + 5 \cdot \sin^2 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

Statt des dritten und vierten Theilsatzes können wir auch schreiben:

$$\frac{p^2 \varepsilon^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} (2 \cdot \sin^2 \beta' + \cos^2 \beta')$$

$$= \frac{p^2 \varepsilon^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} (\sin^2 \beta' + \sin^2 \beta' + \cos^2 \beta')$$

$$= \frac{p^2 \varepsilon^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} (1 + \sin^2 \beta'), \text{ daher:}$$

$$\cos C = 1 - \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} + \frac{p^2 \cdot \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta'}{2} (1 + \sin^2 \beta')$$

Digitized by Google

$$+ \frac{p^4 \cdot \sin {}^2\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos {}^4\beta'} (4 + 5 \sin {}^2\beta')$$

Es ist nun aber auch

$$\cos C = 1 - \frac{C^2}{2} + \frac{C^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots$$

also $\frac{p^2 \operatorname{tg} {}^2\beta'}{2} - \frac{p^2 \varepsilon^2 \cdot \operatorname{tg} {}^2\beta'}{2} (1 + \sin {}^2\beta')$

$$- \frac{p^4 \cdot \sin {}^2\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos {}^4\beta'} (4 + 5 \sin {}^2\beta') = \frac{C^2}{2} - \frac{C^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Um nun hieraus den Werth von C zu finden, so bedenken wir, dafs einer der Theilsätze dieses Werthes offenbar $= p \cdot \operatorname{tg} \beta'$ seyn wird. Bezeichnen wir die übrigen Theilsätze des Werthes von C einstweilen durch die unbestimmte Gröfse z, so ist also $C = p \cdot \operatorname{tg} \beta' + z$ und:

$$\cos C = 1 - \frac{p^2 \operatorname{tg} {}^2\beta' + 2 p \operatorname{tg} \beta' \cdot z + z^2}{2} + \frac{p^4 \cdot \operatorname{tg} {}^4\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Es findet mithin die Gleichung statt:

$$1 - \frac{p^2 \operatorname{tg} {}^2\beta'}{2} + \frac{p^2 \varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} {}^2\beta' (1 + \sin {}^2\beta')$$

$$+ \frac{p^4 \cdot \sin \cdot {}^2\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos^4 \beta'} (4 + 5 \sin {}^2\beta')$$

$$= 1 - \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg} {}^2\beta'}{2} - p \operatorname{tg} \beta' z + \frac{p^4 \cdot \operatorname{tg} {}^4\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot} - \frac{z^2}{2}$$

Die beiden ersten Theilsätze der beiden Glieder dieser Gleichung heben sich gegeneinander auf, und den letzten Theilsatz des zweiten Gliedes: $\frac{z^2}{2}$ können wir wegen seiner Kleinheit vernachlässigen. Wir haben also:

$$\frac{p^2 \varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} {}^2\beta' (1 + \sin {}^2\beta') + \frac{p^4 \cdot \sin {}^2\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos {}^4\beta'} (4 + 5 \sin {}^2\beta')$$

$$= - p \operatorname{tg} \beta' \cdot z + \frac{p^4 \cdot \operatorname{tg} {}^4\beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ oder:}$$

Digitized by Google

$$z = -\frac{p \cdot \varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} \beta' (1 + \sin^2 \beta') - \frac{p^3 \cdot \sin \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cos^3 \beta'} (4 + 5 \sin^2 \beta')$$

$$+ \frac{p^3 \cdot \sin^3 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos^3 \beta'}$$

Statt der beiden letzten Theilsätze können wir schreiben:

$$\frac{-p^3 \cdot \sin \beta' (4 + 5 \sin^2 \beta') + p^3 \sin^3 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos^3 \beta'}$$

$$= \frac{-4 p^3 \cdot \sin \beta' - 5 \cdot p^3 \cdot \sin^3 \beta' + p^3 \sin^3 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos^3 \beta'}$$

$$= \frac{-4 p^3 \cdot \sin \beta' - 4 p^3 \cdot \sin^3 \beta'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos^3 \beta'}$$

$$= \frac{-p^3 \cdot \sin \beta' (1 + \sin^2 \beta')}{2 \cdot 3 \cdot \cos^3 \beta'}, \text{ also}$$

$$z = -\frac{p \cdot \varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} \beta' (1 + \sin^2 \beta') - \frac{p^3 \cdot \sin \beta' (1 + \sin^2 \beta')}{2 \cdot 3 \cdot \cos^3 \beta'}$$

Substituiren wir diesen Werth von z in die Gleichung $C = p \cdot \operatorname{tg} \beta' + z$, so folgt:

$$C = p \cdot \operatorname{tg} \beta' - \frac{p \cdot \varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} \beta' (1 + \sin^2 \beta') - \frac{p^3 \cdot \sin \beta' (1 + \sin^2 \beta')}{2 \cdot 3 \cdot \cos^3 \beta'}$$

§. 147.

Um den Werth von $\operatorname{tg} \beta'$ durch eine Reihe auszudrücken, setzen wir in der Gleichung (14) $B = x$ und die übrigen Theilsätze des zweiten Gliedes $= c$ und bemerken, dafs:

$$\operatorname{tg}(x + c) = \operatorname{tg} x + \frac{c}{\cos^2 x} + \frac{c^2 \cdot \sin x}{\cos^3 x} + \ldots,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} B + \frac{m \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)}{\cos^2 B} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2 \cdot m \cdot \cos 2B}{\cos^2 B}$$

$$+ \frac{m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^2 \cdot \sin B}{\cos^3 B}$$

Digitized by Google

wo wir bei $\cos(2B + m)$ die Gröfse m wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen.

$$\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg} B \pm \frac{m}{\cos^2 B} \mp \frac{\varepsilon^2 \cdot m}{4 \cdot \cos^2 B}(1 - 3 \cdot \cos 2B) + \frac{m^2 \cdot \sin B}{\cos^3 B}$$

§. 148.

Den Werth für $\sin\beta'$ haben wir bereits oben gefunden. Es ist nämlich nach §. 137:

$$\sin\beta' = \sin B \pm m \cdot \cos B \mp \frac{\varepsilon^2 \cdot m}{4} \cdot \cos B(1 - 3 \cdot \cos 2B) - \frac{m^2}{2}\sin B + \frac{m^2\varepsilon^2}{4}(\sin B - 3\sin 3B) \mp \frac{m^3}{6}\cos B$$

Hieraus ergibt sich:

$$1 + \sin^2\beta' = 1 + \sin^2 B \pm 2m \cdot \sin B \cdot \cos B \ldots.$$

§. 149.

Die Multiplication des Werthes von $1 + \sin^2\beta'$ mit dem Werthe von $\operatorname{tg}\beta'$ gibt:

$$\operatorname{tg} B + \frac{m}{\cos^2 B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot m}{4 \cdot \cos^2 B}(1 - 3 \cdot \cos 2B) + \frac{m^2 \sin B}{\cos^3 B} + \operatorname{tg} B \cdot \sin^2 B + m \operatorname{tg}^2 B - \frac{\varepsilon^2 \cdot m}{4}\operatorname{tg}^2 B(1 - 3 \cdot \cos 2B) + m^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg} B \cdot 2m \sin B \cdot \cos B + 2m^2 \operatorname{tg} B - \frac{\varepsilon^2 \cdot m^2}{2}(1 - 3 \cdot \cos 2B)\operatorname{tg} B + \frac{2 \cdot m^2 \cdot \sin^2 B}{\cos^2 B}$$

Substituiren wir nun die Werthe von $\operatorname{tg}\beta'$ und $\operatorname{tg}\beta'(1 + \sin^2\beta')$ in die Gleichung (§. 146.)

Digitized by Google

$$C = p \cdot \operatorname{tg} \beta' - \frac{p\,\varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} \beta' (1 + \sin^2 \beta')$$

$$- \frac{p^3 \cdot \sin \beta' (1 + \sin^2 \beta')}{2 \cdot 3 \cdot \cos^3 \beta'}$$

so folgt:

$$C = p \cdot \operatorname{tg} B \pm \frac{p \cdot m}{\cos^2 B} \mp \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m}{4 \cdot \cos^2 B} (1 - 3 \cdot \cos 2B)$$

$$+ \frac{p \cdot m^2 \cdot \sin B}{\cos^3 B} - \frac{\varepsilon^2 \cdot p}{2} \operatorname{tg} B - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m}{2 \cdot \cos^2 B}$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \cdot p}{2} \operatorname{tg} B \cdot \sin^2 B - \frac{\varepsilon^2 \cdot p \cdot m \cdot \operatorname{tg}^2 B}{2}$$

$$- \varepsilon^2 \cdot p \operatorname{tg} B \cdot m \cdot \sin B \cos B - \frac{p^3 \cdot \sin \beta' (1 + \sin^2 \beta')}{2 \cdot 3 \cdot \cos^3 \beta'}$$

In dem letzten Theilsatze können wir näherungsweise $\beta' = B$ setzen.

$$C = p \operatorname{tg} B \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin^2 B)\right] - \frac{p^3 \operatorname{tg} B (1 + \sin^2 B)}{6 \cdot \cos^2 B}$$

$$+ \frac{p \cdot m^2 \cdot \sin B}{\cos^3 B} + \frac{p \cdot m}{\cos^2 B} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - 3 \cdot \cos 2B)\right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 \sin^2 B}{2} - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 B \cdot \cos^2 B\right],$$

oder:

$$C = p \cdot \operatorname{tg} B \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin^2 B)\right] - \frac{p^3 \operatorname{tg} B (1 + \sin^2 B)}{6 \cdot \cos^2 B}$$

$$+ \frac{p \cdot m^2 \sin B}{\cos^3 B} + \frac{p \cdot m}{\cos^2 B}$$

$$\left(\frac{4 - \varepsilon^2 - 6 \cdot \sin^2 B \cdot \varepsilon^2 + 3 \cdot \varepsilon^2 - 2\,\varepsilon^2 - 2 \sin^2 B\,\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon^2 \sin^2 B + 4\,\varepsilon^2 \sin^4 B}{4}\right)$$

Denn es ist $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B$ und

$$- 4\,\varepsilon^2 \sin^2 B \cos^2 B = - 4\,\varepsilon^2 \cdot \sin^2 B (1 - \sin^2 B)$$

$$= - 4\,\varepsilon^2 \sin^2 B + 4\,\varepsilon^2 \sin^4 B$$

$$C = p \cdot \operatorname{tg} B \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin^2 B)\right] - p^3 \operatorname{tg} B \frac{(1 + \sin^2 B)}{6 \cdot \cos^2 B}$$

Digitized by Google

$$+\frac{p\,.\,m^2\,.\,\sin B}{\cos^3 B}+\frac{p\,.\,m}{\cos^2 B}\left(\frac{4-12\,\varepsilon^2\,.\,\sin^2 B+4\,\varepsilon^3\sin^4 B}{4}\right)$$

$$C=p\,\mathrm{tg}\,B\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}\,(1+\sin^2 B)\right]-\frac{p^3\,\mathrm{tg}\,B\,(1+\sin^2 B)}{6\,.\,\cos^2 B}$$

$$+\frac{p\,.\,m^2\,.\,\sin B}{\cos^3 B}+\frac{p\,.\,m}{\cos^2 B}\left[1-\varepsilon^2\sin^2 B(3-\sin^2 B)\right]$$

$$C=P\left(\frac{3600}{g}\right)\mathrm{tg}\,B\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}\,(1+\sin^2 B)\right]+$$

$$+P\,.\,M\left(\frac{3600}{g}\right)^2\sin 1''\left[\frac{1-\varepsilon^2\,.\,\sin^2 B\,(3-\sin^2 B)}{\cos^2 B}\right]$$

$$+PM^2\left(\frac{3600}{g}\right)^3\sin^2 1''\,.\,\frac{\sin B}{\cos^3 B}$$

$$-P^3\left(\frac{3600}{g}\right)^3\sin^2 1''\,\frac{(1+\sin^2 B)}{6\,.\,\cos^2 B}\,.\,\mathrm{tg}\,B.$$

Setzen wir:

$$\left(\frac{3600}{g}\right)\mathrm{tg}\,B\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}\,(1+\sin^2 B)\right]=i$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^2\sin 1''\left[\frac{1-\varepsilon^2\sin^2 B\,(3-\sin^2 B)}{\cos^2 B}\right]=l$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3\,.\,\sin^2 1''\,.\,\frac{\sin B}{\cos^3 B}=m$$

$$\left(\frac{3600}{g}\right)^3\mathrm{tg}\,B\left(\frac{1+\sin^2 B}{6\,.\,\cos^2 B}\right)\sin^2 1''=k$$

so folgt endlich:

$$C=iP-kP^3+lP\,.\,M+mPM^2 \quad \text{(III.)}$$

§. 150.

Die Berechnung der in den Formeln I, II und III vorkommenden constanten Gröfsen geschieht ganz auf ähnliche Art wie die Berechnung der in den Formeln der sphäroidischen Coordinaten vorkommenden Constanten. Es ist:

Digitized by Google

$\log a = 9{,}09777 - 10$
$\log b = 5{,}96079 - 20$
$\log c = 2{,}76455 - 10$
$\log d = 6{,}56993 - 20$
$\log e = 8{,}90814 - 10$
$\log f = 6{,}17921 - 20$
$\log g = 2{,}27389 - 10$
$\log h = 10{,}17470 - 20$
$\log i = 8{,}98121 - 10$
$\log k = 5{,}97625 - 20$
$\log l = 2{,}88159 - 10$
$\log m = 6{,}55447 - 20$

Um zu zeigen, wie die Formeln I, II und III angewendet werden, wollen wir schliefslich aus den Coordinaten des Punctes Taufstein die geographische Länge und Breite dieses Punctes, so wie die Convergenz der Meridiane von Darmstadt und Taufstein berechnen.

Digitized by Google

P = 16,516,26 Kl.		log P log P² log P³	4,2179117 8,4358234 12,6537351		M =	28794,69 Kl.	log M. log M²	4,4593125 8,9186250
Länge.			**Breite.**			**Convergenz.**		
log a log P	9,09777 4,21791		log c log M	8,90814 4,45931		log i log P	8,98121 4,21791	
log I	3,31568 — 10	+ I 2068″,60	log V	3,36745 — 10	+ V 2330″,50	log IX	3,19912 — 10	+ IX 1581″,70
log b log P³	5,96079 12,65374		log f log P² log M	6,17921 8,43582 4,45931		log k log P³	5,97625 12,65374	
log II	0,61453—2 — 20	— II 0″,04	log VI	0,07434—1 — 20	— VI 0″,12	log X	0,62999—2 — 20.	— X 0″,04
log c log P log M	2,76455 4,21791 4,45931		log g log P²	2,27389 8,43582		log l log P. log M	2,88159 4,21791 4,45931	
log III	1,44177 — 10	+ III 27″,65	log VII	0,70971 — 10	— VII 5″,12	log XI	1,55881 — 10.	+ XI. 36″,21
log d log P log M²	6,56993 4,21791 8,91863		log h log M²	10,17470 8,91863		log m log P. log M²	6,55447 4,21791 8,91863	
log IV	0,70647—1 — 20	+ IV 0″,50	log VIII	0,09333—1 — 20	— VIII 0″,12	log XII	0,69101—1 — 20.	+ XII 0″,49

Digitized by Google

	+	−		+	−		+	−
I II III IV	2068,60 27,65 0,50	0,04	V VI VII VIII	2330,50	0,12 5,12 0,12	IX X XI XII	1581,70 36,21 0,49	0,04
Summe	2096,75	0,04	Summe	2330,50	5,36	Summe	1618,40	0,04
Δ L	34′ 56″, 7		Δ B	38′,45″,1		Convergenz	26′ 58″, 4	
L Δ L	26°, 19′ 30″ 34′, 57″		B Δ B	49°,52′24″ 38′,45				
L′	26°, 54′, 27″		B′	50° 31′ 89″				

Δ L ist hier die Längendifferenz der Puncte Darmstadt und Taufstein.

Δ B die Breitedifferenz dieser Puncte.

L und B = Länge und Breite von Darmstadt.

L und B′ = Länge und Breite des Punctes Taufstein.

Digitized by Google

Anhang.

Von den Ortsentfernungen auf der Erde.

§. 151.

Es kann öfters von Wichtigkeit seyn, die Entfernung zweier ziemlich weit von einander entlegenen Orte auf der Erde, deren geographische Lage man kennt, genau zu bestimmen. Diese Orte seyen H und K.*) Die Breite des ersteren sey = B, die des andern = β, der Winkel, welchen die zwischen H und K befindliche Linie mit dem Meridiane von H bildet, sey = α. Um die verlangte Entfernung zu finden, bedienen wir uns der Formel 11 im §. 128. Es ist also dann:

$$s = (q - q')\,(1 + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k)\,b - \tfrac{3}{4}\,\varepsilon^2 \cos^2 k \,.\, \sin(q - q')\cos(q + q')\,b - \frac{\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 k \,.\, \sin(q - q')\cos q' \,.\, b}{\cos q},$$

in welcher Formel bekanntlich

$$k = \text{arc}\,(\sin = \sin\alpha \,.\, \cos B),$$

$$q = \text{arc}\left(\sin = \frac{\sin\beta}{\cos k}\right)$$

$$q' = \text{arc}\left(\sin = \frac{\sin B}{\cos k}\right)$$

b bedeutet die halbe kleine Erdaxe.

Von dem Winkel α finden wir einen Näherungswerth, wenn wir das Dreieck PHK als ein sphärisches ansehen, in welchem die Seiten HP = $90^0 - B$ und PK = $90^0 - \beta$, so wie der eingeschlossene Winkel ϕ bekannt ist.

*) Fig. 59.

Digitized by Google

Dreizehnter Abschnitt.

Von der Entwerfung geographischer Netze.

§. 152.

Es ist hier jetzt die Art und Weise anzugeben, nach welcher man bei der Entwerfung der Karte eines grofsen Landes zu verfahren hat.

Es stelle Fig. 62 die Erde vor. Das aufzutragende Land sey durch die beiden Parallelkreise a b und e f und durch die beiden Meridiane n h s und n d s begränzt. Es sey ferner c d der mittlere Parallelkreis, und n l s der mittlere Meridian. Man denke sich an die Durchschnittspuncte der Meridiane und des mittleren Parallelkreises h l d die Tangenten p h, p l und p d gezogen, so werden diese die verlängerte Erdachse n s in p durchschneiden, also auch insgesammt in die Oberfläche eines Kegels zu liegen kommen, welcher die Kugel in allen Puncten des mittleren Parallelkreises berührt, und sich mit seiner Spitze in dem Puncte p endiget. Je mehr demnach der mittlere Parallelkreis eines Landes sich dem Pole nähert, desto mehr wird auch der Punct p sich dem Pole nähern, und je weiter der mittlere Parallelkreis vom Pole entfernt ist, desto weiter kommt p vom Pole zu liegen. Ist endlich der mittlere Parallelkreis der Aequator selbst, so kann die Erdachse von der Tangente nicht mehr durchschnitten werden, sondern letztere läuft mit der Erdachse parallel.

Man ziehe nun in Gedanken auf der Oberfläche des Kegels ebenfalls drei Parallelkreise, die mit den Parallelkrei-

Digitized by Google

sen der Kugel gleiche Entfernung haben. Der auf der Kugel verzeichnete Parallelkreis cd fällt dann mit dem entsprechenden auf dem Kegel verzeichneten zusammen. Und auch die andern beiden Kegel-Parallelkreise werden von den Parallelkreisen der Kugel wenig an Gröfse verschieden seyn, sobald ihre Entfernung von dem mittleren Parallelkreise nicht allzugrofs angenommen worden ist.

Man kann demnach ohne merklichen Fehler annehmen, die Contouren des zwischen den beiden Parallelkreisen der Kugel ab und ef enthaltenen Landes seyen auf der Fläche des Kegels gelegen. Breitet man sodann diese Kegelfläche in einer Ebene aus, so bilden die Parallelen if, hd, gb lauter concentrische Kreise. Um diese concentrischen Kreise beschreiben zu können, ist es nothwendig, den zum mittleren Parallelkreis cd gehörigen Radius pd zu berechnen. Diese Berechnung ist sehr einfach. Denn es ist offenbar pd = der Cotangente der geographischen Breite des Parallelkreises cd, multiplicirt mit dem Halbmesser der Erde, d. h. mit 858 geogr. Meilen.

§. 153.

Nachdem Dieses vorausgeschickt worden, ist es nun leicht einzusehen, wie man bei der Construction eines geographischen Netzes zu verfahren hat.

Nehmen wir z. B. an, es sey das Netz für eine Charte der Königreiche Schweden und Norwegen zu entwerfen. Beide Königreiche sind von den Parallelkreisen des 55sten und 70sten Grades nördlicher Breite begränzt, und nur die nördlichste Spitze von Europa, das Nordcap, ragt noch einen Grad und einige Minuten über den 70sten Grad hinaus. Beide Länder fallen ferner zwischen die Meridiane des 20sten und 50sten Grades der Länge. Der mittlere von obigen beiden Parallelkreisen ist demnach der Parallelkreis von 62° 30′.

Digitized by Google

Man ziehe in der Mitte des aufgespannten Blattes die Linie a b (Fig. 68), nehme eine willkührliche Länge für fünf Grade in den Zirkel, und trage selbige aus dem Puncte a so oft an einander, als es die Breite des Landes erfordert. Man bestimme sodann den Durchschnittspunct des mittleren Parallelkreises c, hier 62° 30′, indem man die Länge zwischen dem 60sten und 65sten Grade aufs Neue in fünf gleiche Theile theilt, und den dadurch erhaltenen 62sten und 63sten Grad halbirt. Hierauf verfertige man einen Meilenmaasstab, auf welchem jede Abtheilung von einem Parallelkreise bis zum andern (5 × 15) = 75 Meilen beträgt.

Der Radius cp für den mittleren Parallelkreis beträgt 447 Meilen, die von dem Maafsstabe abgenommen, und aus c auf den verlängerten mittleren Meridian aufgetragen werden müssen. Mit dem Radius pc beschreiben wir sodann den Parallelkreis h d.

Die Gröfse eines Parallelgrades in geographischen Meilen erhält man, wenn man den Cosinus der Breite des Parallels mit 15 multiplicirt. Denn es sey Fig. 64. P A p B ein Durchschnitt der Erdkugel durch die Pole P und p, und AB ihr Durchmesser, so ist E D der Halbmesser eines Parallelkreises. Es verhält sich C B, der Erdradius, oder Radius des Aequators, zu E D, wie der Sinus totus zum Cosinus des W. D C B, oder zum Cosinus der geographischen Breite des Parallelkreises. Ebenso verhalten sich folglich der Aequator und der Parallelkreis, also auch ihre aliquoten Theile oder Grade. Da man einem Aequatorgrad 15 geographische Meilen gibt, so findet man also die Länge eines Parallelgrades von 62° 30′ geogr. Breite durch die Proportion:

sin. tot : cos 62° 30′ = 15 : 6,92 geogr. Meilen.

Es sind also fünf solcher Grade = (6,92 × 5) = 34,6 Meilen. Diese Länge nehme man von dem Meilenmaafsstabe a b, und

Digitized by Google

trage sie von c aus auf dem mittleren Parallelkreise so oft rechts und links, als Meridiane zur Auftragung des Landes erforderlich sind. Man lege sodann das Lineal an eine in den Punct p eingestochene Nadel, und ziehe durch die so eben aufgetragenen Theilungspuncte die Meridiane.

Zur Einzeichnung der Orte bedarf man nur zweier Minutenmaafsstäbe, nämlich einen für die Meridiangrade, welchen wir A, und einen zweiten für die Grade des unteren Parallels, welchen wir B nennen wollen.

Diese Minutenmaafsstäbe erhält man, indem man den fünften Theil des Zwischenraums zweier Parallelkreise, oder zweier Meridiane in sechzig Theile eintheilt.

Will man z. B. die Stadt Stockholm, welche unter einer geographischen Breite von 59° 20′ und einer geogr. Länge von 35° 44′ liegt, in das Netz eintragen, so greift man auf dem Maafsstabe B vier und vierzig Minuten ab, und trägt sie von a nach x. Sodann legt man das Lineal an die Puncte p und x, greift auf dem Maafsstabe A 4° 20′ ab, setzt den einen Zirkelfufs in x, und bringt den andern in die Linie px. Der hierdurch bestimmte Punct y ist der Ort für die Stadt Stockholm.

Auf diese Art kann jedoch nicht die ganze Karte vollendet werden. Wie man sich der vorhandenen Bezirkskarten (§. 38.) zu bedienen hat, um die Krümmungen der Flüsse, so wie die Gebirgszüge und kleinern Städte, deren geographische Lage nicht bestimmt ist, einzuzeichnen, werden wir weiter unten zeigen.

§. 154.

Fafst die zu verfertigende Landkarte nicht mehr als 20 Grad Breite und Länge zwischen dem Aequator und Pol, so ist die eben dargestellte Methode stets anwendbar. Hat je-

Digitized by Google

doch das darzustellende Land eine noch gröfsere Ausdehnung in der Länge und Breite, so bedient man sich zur Entwerfung des Netzes am besten folgenden Verfahrens.

Man zieht, wie vorhin, den mittleren Meridian, und theilt ihn in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Grade, oder Theile; berechnet sodann den Radius des mittleren Parallels, und beschreibt die Parallelen grade so wie vorhin. Nun sucht man für jeden Parallel*) die wahre Länge seiner Grade in Bezug auf den Breitegrad, und theilt ihn vom mittelsten Meridian aus in seine Grade, oder Vielfache von Graden ein. Alle Puncte der Parallelen g, h, m etc. (Fig. 65), welche dieselbe Länge haben, verbindet man, und so sind auch die Meridiane gezogen, welche in diesem Falle weder Kreisbögen, noch Bögen von Ellipsen sind.

Es sey z. B. das Netz für eine Karte zu zeichnen, welche 60 Grad Breite, vom 10ten bis 70sten fassen soll. Der Halbmesser des 40sten Parallels, welcher hier der mittlere seyn kann, ist = 1024,2 Meilen. Die Parallelen, so wie die Meridiane sollen von 10 zu 10 Grad gezogen werden.

Es sind 10 Grade des Parallels l = 51,3 M.
» » » » » » f = 75,0
» » » » » » e = 96,4
» » » » » » d = 114,9
» » » » » » c = 129,9
» » » » » » b = 140,9
» » » » » » a = 147,7

Diese kann man von einem durch die Gröfse der Karte bestimmten Meilenmaafsstabe abnehmen, und als Sehnen auf die Parallelen tragen, da sie von den Bogen gf u. s. w.

*) Bei der vorhergehenden Methode geschah Dieses blofs bei dem mittleren Parallel.

Digitized by Google

deren Länge sie eigentlich ausdrücken, nur unmerklich differiren.

§. 155.

Das Material zur Ausfüllung dieser geographischen Netze liefern die im §. 38. erwähnten Bezirkskarten. Ehe man sich jedoch derselben zu diesem Behufe bedienen kann, müssen auch sie mit einem solchen, geographischen Netze überzogen werden, indem man die Meridiane und Parallelkreise von etwa 5 zu 5 Minuten, als grade sich rechtwinklich durchschneidende Linien in dieselben einträgt.

Wie man hierbei zu verfahren hat, wird aus folgendem Beispiele erhellen. In der Bezirkskarte, welche mit einer Gradeintheilung versehen werden soll, komme der Punct Taufstein vor, dessen geographische Länge = 26°,54′, und dessen geogr. Breite = 50° 31 , ist.*) Zuerst ziehen wir die Coordinaten dieses Punctes mit Bleistift aus, und verlängern dieselben nach allen vier Seiten hin bis an den Rand der Karte, wodurch die ganze Karte in vier Quadranten getheilt wird. Im gegenwärtigen Falle wird nun der Punct (d), wo der Meridian für 26°,50′ Länge von dem Parallelkreis für 50° 30′ Breite durchschnitten wird, in dem südwestlichen Quadranten liegen, und es kommt nun hauptsächlich darauf an, die Lage des Punctes d auf der Karte genau zu bestimmen. Zu diesem Behufe berechnen wir, wie viel Klaftern auf eine Minute des Meridians gehen, greifen diese Anzahl auf dem Maafsstabe, nach welchem die Bezirkskarte aufgenommen worden ist, ab, und tragen sie von dem Puncte T (Taufstein) aus nach Süden zu auf die Abscisse dieses letzteren Punctes. Den Punct, der hierdurch auf der Abscisse fest gelegt wird, nennen wir n. Sodann berechnen wir, wie

*) Die Secunden wollen wir hier vernachlässigen.

Digitized by Google

viel Klafter auf vier Minuten desjenigen Parallels gehen, welcher der geogr. Br. von 50° 30′ angehört. Hierauf errichten wir in dem Puncte n nach Westen zu einen Perpendikel und tragen mittels des nämlichen Maasstabes diese zuletzt gefundene Anzahl von Klaftern von n aus auf diesen Perpendikel, wodurch wir den Punct d erhalten, wo der Meridian für 26°, 50′ L. von dem Parallelkreis für 50° 30′ B. durchschnitten werden soll. Diesen Meridian ziehen wir, parallel mit der Abscisse von Taufstein, vom nördlichen Rande der Karte bis zum südlichen. Ebenso ziehen wir parallel mit der Ordinate von Taufstein durch den Punct d eine gerade Linie, und erhalten hierdurch den Parallelkreis für 50° 30′ Br.

Hierauf suchen wir die Länge von 5 Minuten des Meridians in Klaftern, tragen sie von d aus südlich und nördlich so oft auf den Meridian, als es die Gröfse der Karte erfordert, und ziehen durch die Theilungspuncte gerade Linien, welche mit der Ordinate von Taufstein parallel laufen.

Endlich suchen wir die Länge von 5 Minuten des Parallelkreises für 50° 30′ Br. in Klaftern und tragen diese Länge von d aus rechts und links so oft auf den Parallel von 50° 30′, als es die Gröfse der Karte erfordert. Durch die Theilungspuncte ziehen wir gerade Linien, welche mit dem Meridian parallel laufen.

Somit wäre also das verlangte Minutennetz vollständig aufgetragen. Sollen nun die wichtigsten Data, welche die Bezirkskarten enthalten, in das Netz der Generalkarte übergetragen werden, so müssen die Vierecke des letzteren in eine Menge kleinerer Vierecke zerlegt werden, und zwar dadurch, dafs man die Meridiane und Parallelen ebenfalls von 5 zu 5 Minuten eintheilt, und in jedem Viereck die gegenüberliegenden Theilungspuncte durch feine Bleistiftlinien verbindet, welche nach Vollendung der Karte wieder weggewischt wer-

Digitized by Google

den müssen. In diese kleinen Vierecke werden die Städte, Flüsse u. s. w. aus den entsprechenden gröfseren Vierecken der Bezirkskarten nach dem Augenmaafse eingetragen.

Hinsichtlich der speciellen Regeln des Planzeichnens müssen wir den Leser auf die Werke von Louis, Netto u. A. verweisen.

Digitized by Google

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Berechnung der beiden Axen, der Oberfläche und des Körperinhaltes der Erde.

§. 156.

Zu der Erfahrung, dafs die Gestalt der Erde nicht ganz die einer Kugel ist, ist man dadurch gelangt, dafs man an verschiedenen, weit von einander entlegenen Orten derselben Meridianbögen mittels grofser Triangulirungen bestimmt, und dieselben mit einander verglichen hat. Bei dieser Vergleichung fand man, dafs die Breitenunterschiede der Endpuncte der einzelnen Meridianbögen keineswegs mit der Gröfse der respectiven Bögen in Proportion stehen, was bei der Kugel der Fall seyn mufs. Durch genaue Berechnungen kam man sodann zu dem Resultat, dafs die Erde die Gestalt eines Umdrehungsellipsoides, bei dem die kleine Axe die Umdrehungsaxe bildet, haben müsse, wie wir auch in dem Vorhergehenden immer angenommen haben.

Das eben Gesagte wird durch die Betrachtung der Figur 60 deutlicher werden. Es sey OP ein Erdmeridianquadrant, AB und A′B′ zwei gemessene Meridianbögen. Der Winkel, welchen die beiden Normalen AC und BC mit einander bilden, sey = a, ebenso der Winkel der beiden Normalen DA′ und DB′ = b. Wäre nun die Erde eine Kugel, so müfste offenbar die Proportion statt finden:

$$AB : a = A'B' : b$$

was aber in der Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Digitized by Google

Ist dagegen der Meridian eine Ellipse, so mufs nothwendig der Winkel a bei gleichen Längen der Bögen A′B′, AB gröfser seyn, als der M. b. Zugleich ist offenbar, dafs man aus dem Verhältnisse, in welchem mehrere gleiche Meridianbögen zu ihren respectiven Breitendifferenzen stehen, die eigentliche Gestalt des Erdmeridians nahe berechnen kann. In dem Folgenden unterstellen wir, diese Berechnung sey bereits vollzogen, und man habe gefunden, dafs der Erdmeridian eine Ellipse sey. Wir versuchen nun zu zeigen, wie man aus den Gröfsen zweier Meridianbögen und den geographischen Breiten ihrer Endpuncte die kleine und grofse Axe der Erde, d. h. die gradlinige Entfernung des Nordpols von dem Südpol, so wie den Durchmeser des Aequators berechnen kann.

Aus der bekannten Gleichung $dm = \frac{a(1-e^2)\,d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$ (§. 117.) folgt: $dm = d\beta\, a\,(1-e^2)\,(1-e^2\sin^2\beta)^{-3/2}$. Hier können wir den Factor $(1-e^2\sin^2\beta)^{-3/2}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln, und erhalten dadurch, wenn wir wegen der Kleinheit der Zahl e keine höhere Potenzen derselben als die vierte beibehalten, folgenden Werth, von dm:

$dm = d\beta\, a\,(1-e^2)\,(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\beta + \frac{15}{8}e^4\sin^4\beta)$.

Aus der bekannten Formel $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$ folgt: $\sin^2\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\beta$. (I.) Hieraus ergibt sich ferner: $\sin^4\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{4}(\cos 2\beta)^2$. Da nun $\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2}$, also $(\cos 2\beta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\beta$, so ist:

$\sin^4\beta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{8}\cos 4\beta$. (II.)

Substituiren wir die Werthe von $\sin^2\beta$ und $\sin^4\beta$ in die Gleichung für dm, so folgt:

Digitized by Google

$$dm = d\beta \cdot a\,(1 - e^2)\,[1 + \tfrac{3}{2}\,e^2\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\beta)] + \tfrac{15}{8}\,e^4\,(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\beta + \tfrac{1}{8}\cos 4\beta)]$$

$$= d\beta \cdot a\,(1 - e^2)\,(1 + \tfrac{3}{4}\,e^2 - \tfrac{3}{4}\,e^2\cos 2\beta + \tfrac{45}{64}\,e^4 - \tfrac{15}{16}\,e^4\cos 2\beta + \tfrac{15}{64}\,e^4\cos 4\beta)$$

$$= d\beta \cdot a \cdot (1 + \tfrac{3}{4}\,e^2 - \tfrac{3}{4}\,e^2\cos 2\beta + \tfrac{45}{64}\,e^4 - \tfrac{15}{16}\,e^4\cos 2\beta + \tfrac{15}{64}\,e^4\cos 4\beta - e^2 - \tfrac{3}{4}\,e^4 + \tfrac{3}{4}\,e^4 \cdot \cos 2\beta)$$

Statt der Theilsätze $-e^2 - \frac{3}{4}\,e^4 + \frac{3}{4}\,e^4\cos 2\beta$ kann man auch schreiben $-\frac{4}{4}\,e^2 - \frac{48}{64}\,e^4 + \frac{12}{16}\,e^4\cos 2\beta$. Wir erhalten also:

$$dm = d\beta \cdot a \cdot (1 - \tfrac{1}{4}\,e^2 - \tfrac{3}{64}\,e^4 - \tfrac{3}{4}\,e^2 \cdot \cos 2\beta - \tfrac{3}{16}\,e^4\cos 2\beta + \tfrac{15}{64}\cos 4\beta),$$ oder

$$dm = d\beta \cdot a\,[1 - \tfrac{1}{4}\,e^2 - \tfrac{3}{64}\,e^4 - (\tfrac{3}{4}\,e^2 + \tfrac{3}{16}\,e^4)\cos 2\beta + \tfrac{15}{64}\,e^4\cos 4\beta].$$

Man setze $1 - \frac{1}{4}\,e^2 - \frac{3}{64}\,e^4 = A$; $\frac{3}{4}\,e^2 + \frac{3}{16}\,e^4 = B$; $\frac{15}{64}\,e^4 = C$; so kömmt:

$$dm = a\,(A \cdot d\beta - B\cos 2\beta \cdot d\beta + C\cos 4\beta \cdot d\beta)$$

oder:

$$dm = a\left(A\,d\beta - \frac{B \cdot \cos 2\beta \cdot 2\,d\beta}{2} + \frac{C \cdot \cos 4\beta\,4\,d\beta}{4}\right)$$

Es ist aber

$$d \cdot \sin 2\beta = \cos 2\beta \cdot 2 \cdot d\beta \text{ und } d \sin 4\beta = \cos 4\beta \cdot 4\,d\beta$$

Es ist also nach vollzogener Integration:

$$m = a\left(A\beta - \frac{B \cdot \sin 2\beta}{2} + \frac{C \cdot \sin 4\beta}{4}\right) + \text{Const.}$$

Für eine andere Breite β' ist:

$$m' = a\left(A\beta' - \frac{B \cdot \sin 2\beta'}{2} + \frac{C \cdot \sin 4\beta'}{4}\right) + \text{Const.}$$

Es ist mithin:

Digitized by Google

$$m - m' = a \left[A\ (\beta - \beta') - \frac{B}{2}\ (\sin 2\ \beta - \sin 2\ \beta') + \frac{C}{4}\ (\sin 4\ \beta - \sin 4\ \beta') \right]$$

Dieses ist die Länge des Meridianbogens, welcher die Breiten β und β' an seinen Endpuncten hat. $\beta - \beta'$ bedeutet eine Anzahl Secunden und ist ursprünglich in Winkelmaafs ausgedrückt. Wollen wir dieses Winkelmaafs in Bogenmaafs verwandeln, so müssen wir $\beta - \beta'$ mit arc $1''$, oder, was das nämliche ist, mit sin $1''$ multipliciren. Demnach ist:

$$m - m' = a \left[A\ (\beta - \beta')\ \sin 1'' - \frac{B}{2} \times \left(2 \sin \frac{2\ \beta - 2\ \beta'}{2} \cdot \cos \frac{2\ \beta + 2\ \beta'}{2}\right) + \frac{C}{4} \left(2 \sin \frac{4\ \beta - 4\ \beta'}{2} \cdot \cos \frac{4\ \beta + 4\ \beta'}{2}\right)\right]$$

$$m - m' = a \left[A\ (\beta - \beta')\ \sin 1'' - B \cos (\beta' + \beta) \sin (\beta - \beta') + \frac{C}{2} \cos 2\ (\beta' + \beta) \cdot \sin 2\ (\beta - \beta')\right]$$

§. 157.

Wenn man die Gröfsen, womit hier A, B und C multiplicirt sind, berechnet hat, so kann man leicht eine Gleichung von der Form $M = a\ (\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4)$ bilden, und ebenso für einen zweiten Meridianbogen:

$$M' = a\ (\alpha' + \beta' e^2 + \gamma' e^4).$$

Eliminirt man a, so erhält man eine Gleichung von der Form $p + q e^2 + r e^4 = 0$. Aus dieser Gleichung findet man e^2, wenn man die Glieder mit e^6 und den höhern Potenzen vernachlässigt, auf folgende Art. Es ist: $e^2 (q + r e^2) = -p$ und $e^2 = \frac{-p}{q} - \frac{r e^4}{q}$. Vernachlässigen wir in diesem

Digitized by Google

Ausdruck den letzten Theilsatz, so kömmt: $e^2 = \frac{-p}{q}$.

Diesen Werth von e^2 setzen wir in die Gleichung $e^2 (q + re^2) = -p$, und erhalten dadurch:

$$e^2 \left(q - \frac{rp}{q}\right) = -p, \text{ also } e^2 = \frac{-pq}{q^2 - rp}.$$

Ist e^2 auf diese Art gefunden, so folgt aus der Gleichung $M = a(\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4)$ der Werth des Aequatordurchmessers oder der grofsen Axe der Erde $= a = \frac{M}{\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4}$.

Hieraus folgt $\log a = \log M - \log (\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4)$

$$\log a = \log M - \log \alpha - \log \left(1 + \frac{\beta e^2}{\alpha} + \frac{\gamma e^4}{\alpha} \cdot\right)$$

Aus der Differentialrechnung ist aber bekannt, dafs

$$\log (1 + u) = m \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots\right),$$

wo m den Modulus des Brigg'schen Logarithmensystems bedeutet.

Es ist also

$$\log a = \log M - \log \alpha + 0{,}4342945 \left(-\frac{\beta}{\alpha} e^2 - \frac{\gamma}{\alpha} e^4 + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} e^4\right)$$

die halbe kleine Axe b ist $= a\sqrt{1 - e^2}$, also

$$\log b = \log a + \tfrac{1}{2} \log (1 - e^2)$$

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dafs die Messung zweier Meridianbögen hinreichend ist, um die Axen der Ellipse zu bestimmen, welche durch ihre Umdrehung den Erdball erzeugte.

Auf obige Art hat man gefunden, dafs die halbe kleine Erdaxe = 3261014, die halbe grofse = 3271819 Toisen grofs ist.

Es ist daher $\log b = 6{,}513853$

$\log a = 6{,}514789$

$e^2 = 0{,}006594$

Digitized by Google

§. 158.

Es ist nunmehr erforderlich, die Formel für die Berechnung der sphäroidischen Erdoberfläche zu bestimmen.

Es drehe sich die krumme Linie AE (Fig. 61) so um die Axe X, dafs ein jeder ihrer Puncte die Peripherie eines Kreises beschreibt, dessen Mittelpunct auf X liegt, und dessen Ebene auf X senkrecht ist. Um den Flächeninhalt der von den Bogen BE, dessen Endpuncte die Linien $OF = q$ und $OI = q'$ zu Abscissen haben, beschriebene Zone zu bestimmen, so sey $CD = dm$ das Differential des Bogens, $y = CG$ und $y + dy = DH$ die Ordinate seiner Endpuncte. Die von dem verschwindend kleinen Bogen CD beschriebene Zone fällt zusammen mit dem von der Chorde desselben beschriebenen abgestumpften Kegel. Nennen wir den Umfang des mit dem Halbmesser GC beschriebenen Kreises $= P$, den Umfang des mit DH beschriebenen dagegen $= P'$, so ist die von CD beschriebene Zone

$$= \frac{P + P'}{2} \cdot CD = \frac{2\pi(y + y + dy)}{2} \cdot dm = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dm,$$

weil wir dy in der Summe $y + y + dy$ neben $y + y$ weglassen müssen. Es ist also der Flächeninhalt der ganzen Zone

$$= 2\pi \int y \cdot dm + \text{const.} = 2 \cdot \pi \cdot \int y \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \text{const.}$$

Es sind hier statt y und $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der betreffenden krummen Linie ihre Werthe zu substituiren, und nach erfolgter Integration ist die Constante zu bestimmen, indem wir bemerken, dafs für $x = q$ das Integral verschwindet.

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich, wenn wir die kleine Axe als Abscissenaxe annehmen:

$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$, also $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{a \cdot x}{b\sqrt{b^2 - x^2}}$. Daher der Flächeninhalt der elliptischen Zone

Digitized by Google

$$= 2\pi \int \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2} \cdot dx \sqrt{1 + \frac{a^2 \cdot x^2}{b^2 (b^2 - x^2)}} + \text{const.}$$

$$= 2\pi a \int \cdot dx \sqrt{\left(1 - \frac{(b^2 - a^2)}{b^4} x^2\right)} + \text{const.}$$

Um die angedeutete Integration zu bewerkstelligen, bedenken wir, dafs im Allgemeinen:

$$\int dx \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \frac{(2\alpha x + \beta)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}{4\alpha}$$

$$- \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{8\alpha} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} + \text{const.}$$ Im gegenwärtigen Falle ist $\alpha = -\frac{b^2 - a^2}{b^4}$, $\beta = 0$, und $\gamma = 1$; daher $\int dx \sqrt{\left(1 - \frac{b^2 - a^2}{b^4} x^2\right)} = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^4}\right) x^2}$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^4}\right) x^2}} + \text{const.}$$

Es ist ferner im Allgemeinen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc.sin.} \frac{2\alpha x - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}} + \text{const.}$$

Setzen wir wiederum $\gamma = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^4}$, so kömmt:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^4}\right) x^2}} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \text{arc sin} \frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2}$$

Also der Flächeninhalt F der elliptischen Zone

$$= \pi a x \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^4}\right) x^2} + \pi a \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \text{arc.sin.} \frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2}$$

+ const. Um diese Constante zu bestimmen, bedenken wir, dafs für $x = 0$ auch $F = 0$ wird. Die Constante ist also im gegenwärtigen Falle ebenfalls $= 0$. Setzen wir in die letzte Gleichung statt x den Werth b, so erhalten wir die Fläche des halben Sphäroids. Die Oberfläche der ganzen Erde ist also

Digitized by Google

$$= 2\pi . a . b \sqrt{1 - \left[\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right]} + \pi . a . \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} . \text{arc} . \sin \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

§. 159.

Viel einfacher ist die Formel für den Körperinhalt der Erde, welche wir auf folgende Weise bestimmen. — Geben wir zuvörderst die Art und Weise an, wie wir den Inhalt des Körpersegmentes finden können, welches durch die Umdrehung der Fläche BEIF (Fig. 61) um die Axe X beschrieben wird. Durch die Umdrehung des auf $DH = y + dy$ und $GH = dx$ ergänzten Rechteckes um die Axe X entsteht ein Cylinder, dessen Körperinhalt $= \pi (y + dy)^2 dx = \pi (y^2 + 2y . dy + dy^2) dx$. Ebenso entsteht durch die Umdrehung des auf $CG = y$ und $GH = dx$ beschriebenen Rechteckes um die Axe X ein Cylinder, dessen Körperinhalt $= \pi y^2 dy$. Die Differenz dieser beiden Cylinder ist $= \pi (2y\,dy + dy^2) dx$, also verschwindend klein von der zweiten Ordnung. Da nun der von dem Differential DCHG des Segmentes beschriebene Körperinhalt zwischen diesen beiden Cylindern begriffen ist, so können wir denselben ohne Irrthum $= \pi y^2 dx$ setzen. Der Inhalt des ganzen Körpersegmentes ist also $= \pi \int y^2 . dx$. Der Werth von y^2 ist gegenwärtig, wenn wir den einen Endpunct der kleinen Axe als Anfangspunct der Coordinaten ansehen,

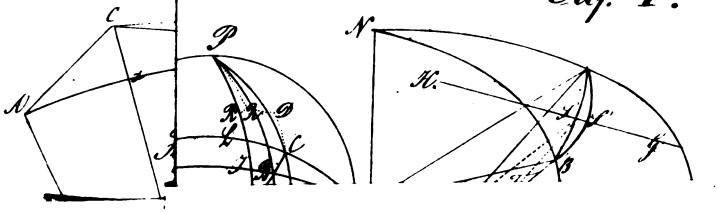
$= \frac{a^2}{b^2} (2bx - x^2)$. Es ist also $\pi \int y^2 . dx + \text{const}$

$= \pi . \frac{a^2}{b^2} \int (2bx - x^2) dx + \text{const} = \pi \frac{a^2}{b^2} \left(bx^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \text{const.}$

Für $x = 0$ verschwindet das Integral; es ist also $\text{const} = 0$. Um den Körperinhalt der ganzen Umdrehungsellipsoide zu erhalten, haben wir $x = 2b$ zu setzen; dieselbe ist also: $= \pi \frac{a^2}{b^2} \left(4b^3 - \frac{8b^3}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi . b . a^2$.

Digitized by Google

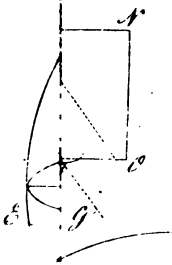
Taf. I.

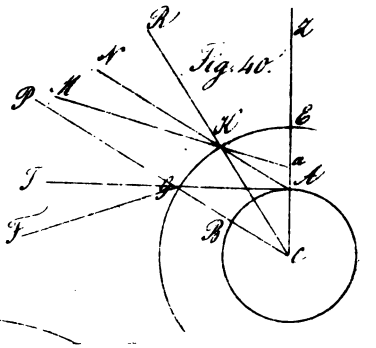


Digitized by Google

Digitized by Google

Taf. III.





Digitized by Google

Digitized by Google

Taf. III.

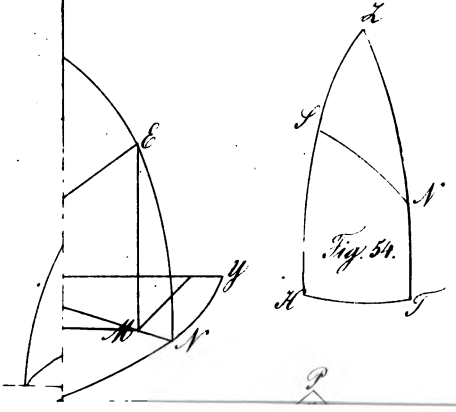
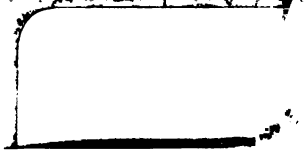


Fig. 54.

Digitized by Google



Digitized by Google

89078557832

B89078557832A

Digitized by Google